Lagebestimmung und Konturkorrektur allgemeiner Körper

Diplomarbeit

von

David Lutterkort

Beginn der Arbeit: 24. April 1995
Ende der Arbeit: 23. Oktober 1995

Universität Karlsruhe(TH), Fakultät für Informatik,
Institut für Betriebs– und Dialogsysteme
Betreuer: Prof. Dr. H. Prautzsch

Karlsruhe, Oktober 1995

Hiermit versichere ich, daß ich die vorliegende Diplomarbeit selbständig und nur mit Hilfe der angegebenen Quellen verfaßt habe.

Karlsruhe, den 25. Oktober 1995

David Lutterkort

Ich bedanke mich bei Herrn Prof. Dr. H. Prautzsch für die Anregung zu dieser Arbeit und seine stets freundliche und sehr hilfreiche Unterstützung während ihrer Anfertigung.
Mein ganz besonderer Dank gilt Herrn Dipl.–Math. Werner Wendler, der es nie müde wurde, Ideen mit mir zu diskutieren, und mich damit oft erst auf den richtigen Weg brachte.
Frau Dipl.–Math. Claudia Bangert danke ich für die Beantwortung vieler Fragen und für zahlreiche wertvolle Tips.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis iii

Symbolverzeichnis v

Kapitel 1. Einführung 1
1. Überblick über die Arbeit 2

Kapitel 2. Mathematische Grundlagen 5
1. Minimierung von Funktionen auf $\mathbb{R}$ 5
2. Minimierung von Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ 6
3. Eigenwerte symmetrischer, positiv definiter Matrizen 6
4. Die Singulärwertzerlegung einer Matrix 7
5. Die Pseudoinverse einer Matrix 7
6. B–Splines 8
7. Abstandsberechnung 10

Kapitel 3. Problemstellung 13
1. Gläser und Dekore 13
2. Die Ansteuerung der Maschine 14
3. Der Meßfühler 15
4. Meßwerte und -punkte 15
5. Problemstellung 19

Kapitel 4. Der Trägheitstensor 21
1. Körper und Bezugssysteme 22
2. Masse und Schwerpunkt 23
3. Der Trägheitstensor 23
4. Bewegung des Bezugssystems 25

Kapitel 5. Lagebestimmung in der Ebene 27
1. Minimierung 28
2. Der Trägheitstensor in der Ebene 30
3. Parameteranpassung 32
4. Lagebestimmung mit dem Trägheitstensor 32
5. Lagebestimmung durch Bahnverfolgung 35
6. Testergebnisse 37

Kapitel 6. Lagebestimmung im Raum 43
1. Minimierung 43

2. Der Trägheitstensor im Raum 45
3. Lagebestimmung mit dem Trägheitstensor 46
4. Testergebnisse 48

Kapitel 7. Konturkorrektur 55
1. Approximation mit polynomialen Kurven 56
2. Approximation mit rationalen Kurven 56
3. Approximation mit Tensorproduktflächen 58
4. Testergebnisse 59

Anhang A. Die Berechnung von Momenten 61
1. Ebene Polygonzüge 61
2. Die Fläche eines ebenen Polygons 62
3. Momente eines Dreiecks im Raum 62

Literaturverzeichnis 63

Abbildungsverzeichnis

3.1	Die sechs Achsen der Schleifmaschine.	15
3.2	Schematische Darstellung des Meßfühlers	16
3.3	Ein Meßnetz und seine Zerlegung in Dreiecke.	17
3.4	Verfälschung der Parameter beim Messen.	18
4.1	Hauptträgheitsachsen	25
5.1	Berührpunkte	35
5.2	Verdeckung	35
5.3	Testkurve 1.	38
5.4	Testkurve 2.	40
5.5	Testkurve 3.	41
6.1	Lagebestimmung mit dem Trägheitstensor	47
6.2	Testkontur 1.	49
6.3	Testkontur 2.	50
6.4	Testkontur 3.	51
6.5	Testkontur 4.	52

Symbolverzeichnis

Punkte, Vektoren und Matrizen

x	Normale Buchstaben bezeichnen reelle Zahlen.
$\mathbf{x}$	Kleine fette Buchstaben bezeichnen Punkte und Vektoren.
$\mathbf{x}_i$	Die i–te Komponente von $\mathbf{x}$.
$\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$	n Vektoren.
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$	Das Standardskalarprodukt der Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$.
$\lVert \mathbf{x} \rVert = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$	Die euklidische Norm eines Vektors.
$\mathbf{A}$	Große, fette Buchstaben bezeichnen Matrizen.
$\mathbf{A}_{ij}$	Das Element in der i–ten Zeile und j–ten Spalte in der Matrix $\mathbf{A}$.
$\mathbf{A}^T$	Die Transponierte der Matrix $\mathbf{A}$.
$\mathbf{A}^+$	Die Pseudoinverse von $\mathbf{A}$.

Körper und Momente

$\mathbf{K}$	Ein Körper im Raum oder in der Ebene.
M	Die Masse eines Körpers.
$\mathbf{s}$	Der Schwerpunkt eines Körpers.
$\mathbf{J}$	Der Trägheitstensor eines Körpers.
$\mathcal{B}$	Ein affines Bezugssystem (orthonormale affine Basis).
$\mathcal{H}$	Das Hauptträgheitssystem eines Körpers

Kurven und Flächen

$\mathbf{p}(t)$	Eine parametrische Kurve
$\dot{\mathbf{p}}(t)$	Die erste Ableitung von $\mathbf{p}$ nach dem Parameter t.
$\mathbf{n}(t)$	Eine Normale im Punkt $\mathbf{p}(t)$.
$\mathbf{p}(u, v)$	Eine parametrische Fläche.
$\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v$	Die partiellen Ableitungen einer Fläche $\mathbf{p}$ nach u bzw. v.
$\mathbf{n}(u, v)$	Eine Normale im Punkt $\mathbf{p}(u, v)$.

KAPITEL 1

Einführung

Das Thema dieser Diplomarbeit stammt von der Firma ProGlas GmbH, einem Hersteller von Schleifmaschinen. Das wichtigste Produkt von ProGlas ist die Maschine ProAxa, die dazu dient, Muster auf Trinkgläser, Vasen oder Glasschalen zu schleifen.

Der gesamte Schleifvorgang erfolgt computergestützt. Er war ursprünglich nur darauf ausgelegt, Rotationsgläser zu schleifen. In letzter Zeit wurde die Computeransteuerung der Maschine so verbessert, daß Gläser mit fast beliebigen Formen bearbeitet werden können. Im Zuge dieser Verbesserung traten viele Probleme auf, die zum Teil nach sehr anspruchsvollen Lösungen aus dem Computer Aided Geometric Design (CAGD) verlangen.

Der Ausgangspunkt für die Produktion von dekorierten Gläsern ist die Modellierung der Glasform und der Entwurf der Dekore mit einem CAD–System der Firma, Crystal–CAD.

Nach dem Entwurf werden aus der Glasform und den Dekoren Schleifbahnen berechnet, die dann an die Maschine übertragen und von ihr ausgeführt werden. Mit diesem Schleifprogramm wird eine ganze Serie gleicher Gläser geschliffen.

Wenn man das Ergebnis des Schleifens genauer untersucht, stellt man fest, daß die Schliffe Unregelmässigkeiten aufweisen: Zum Beispiel kommt es oft vor, daß drei Kurven, die sich im Modell in einem Punkt treffen, auf dem Glas drei verschiedene Schnittpunkte haben.

Wir werden in dieser Arbeit zwei der Probleme angehen, die zu solchen Ungenauigkeiten führen. Diese beiden Probleme haben die folgenden Ursachen:

- Die Gläser werden von Hand in die Maschine gestellt. Dadurch kann man nicht sicherstellen, daß sich das Glas genau an der Position befindet, die durch das Computermodell angegeben ist. Dieser Positionierfehler ist in großem Maße für Schliffabweichungen verantwortlich.
- Alle Gläser haben kleine Unebenheiten. Bedingt durch den Produktionsprozeß weisen sie kleine Einbuchtungen auf oder sind etwas länger oder kürzer als das „ideale“ Modell des Computers.

Das Ziel dieser Arbeit ist es vor allem, das erste Problem zu lösen und eine Lagebestimmung des Glases in der Maschine vorzunehmen. Am Ende werden wir auch noch auf das zweite Problem, das eine Anpassung des Modells erfordert, eingehen.

Die Methoden, die in dieser Arbeit entwickelt wurden, sind aber keineswegs auf die Lagebestimmung von Gläsern beschränkt. Sie können überall dort Anwendung finden, wo eine vorgegebene Kurve oder Fläche mit einer Menge von Meßpunkten zur Deckung gebracht werden soll.

Die Firma ProGlas ist natürlich nicht nur an den Methoden zur Lagebestimmung interessiert, sondern auch an einer lauffähigen, schnellen und universell einsetzbaren Implementierung dieser Methoden. Zu Anfang der Arbeit war es nur beabsichtigt, einige Routinen zu implementieren, die die Lagebestimmung und die Anpassung des Modells vornehmen. Es hat sich aber im Laufe der Arbeit gezeigt, daß viele Verfahren, die dazu nötig sind, bei ProGlas für andere Zwecke eingesetzt werden können. So ist nun eine ganze Bibliothek von Routinen entstanden, mit denen man die Meßdaten, die die Maschine liefert, zusammen mit dem Modellglas komfortabel bearbeiten kann und die viele wichtige numerische Verfahren zur Verfügung stellt. Die Dokumentation zu dieser Bibliothek ist in einem separaten Anhang zu dieser Diplomarbeit enthalten.

1. Überblick über die Arbeit

In Kapitel 2 stellen wir die Grundlagen aus der Numerik und dem CAGD bereit, die wir im Rest der Arbeit benötigen. Wir beschränken uns darauf, nur die wichtigsten Begriffe zu zitieren und die verwendeten numerischen Verfahren zu skizzieren. Ausführliche Informationen findet man in der Literatur, die in diesem Kapitel angegeben ist.

Für eines der Verfahren zur Lagebestimmung benötigen wir einige Begriffe aus der Mechanik. Die notwendigen Grundlagen dazu stellen wir im Kapitel 4 vor, wo wir die Momente eines Körpers und ganz besonders seinen Trägheitstensor erläutern.

Der Meßvorgang, der den Ausgangspunkt für die Lagebestimmung bildet, wird in Kapitel 3 vorgestellt. In diesem Kapitel findet sich auch eine Beschreibung der Schleifmaschine. Am Ende des Kapitels sind wir in der Lage, unser Problem zu präzisieren und seine Formulierung so anzugeben, wie sie im Rest der Arbeit verwendet wird.

Nachdem wir die nötigen Grundlagen abgedeckt haben, können wir uns der Lagebestimmung zuwenden. Die Lagebestimmung erfolgt durch die Berechnung einer Bewegung aus den Meßdaten und dem Modell des Glases mit dem Ziel, Meßdaten und Modell möglichst gut zur Deckung zu bringen. Zunächst betrachten wir das Problem nur für ebene Kurven, danach dann für dreidimensionale Flächen.

Die Kapitel 5 und 6 bilden den Kern der Arbeit. In ihnen beschreiben wir die Methoden, die wir für die Lagebestimmung von Kurven in der Ebene und von Flächen im Raum verwenden. Beide Kapitel enthalten Testergebnisse, die die implementierten Verfahren demonstrieren.

Zur Lagebestimmung von Kurven in der Ebene werden drei Ansätze vorgestellt: Der erste bestimmt die Lage eines Glases über die Minimierung des quadratischen Fehlers zwischen Meßpunkten und Modellfläche. Der zweite berechnet aus den Meßpunkten und dem Modellglas je ein affin invariantes Koordinatensystem, und bringt die beiden Koordinatensysteme durch eine Bewegung zur Deckung. Das entscheidende Hilfsmittel dafür ist der Trägheitstensor. Der dritte Ansatz macht sich zunutze, daß sich Punkte bei einer Drehung auf Kreisbahnen bewegen und schneidet die Bahnen auf denen sich die Meßpunkte bewegt haben mit der Modellfläche.

Die ersten beiden Ansätze lassen sich direkt auf räumliche Gebilde übertragen. Das sind die beiden Methoden zur Lagebestimmung, die für ganze Gläser verwendet werden.

Die Verbesserung des Computermodells steht im Mittelpunkt von Kapitel 7. Wir verbessern das Modell, indem wir die Meßdaten neu approximieren. Auch dieses Kapitel wird mit der Darstellung von Tests der implementierten Verfahren abgeschlossen.

Die Verfahren in diesem Kapitel lassen sich nicht nur dazu verwenden, das Modell an ein bestimmtes Glas anzupassen, sondern können auch dazu eingesetzt werden, das Modellieren einer neuen Glasform zu vereinfachen und sicherzustellen, daß das Modell und die bearbeiteten Gläser möglichst exakt übereinstimmen.

KAPITEL 2

Mathematische Grundlagen

Dieses Kapitel zerfällt in zwei Teile: Im ersten Teil skizzieren wir die numerischen Verfahren, die wir bei unserer Implementierung verwendet haben. Dies sind Verfahren zur Minimierung ein– und mehrdimensionaler Funktionen, zur Berechnung von Eigenwerten und zur Berechnung der Pseudoinversen einer Matrix.

Im zweiten Teil des Kapitels, beginnend in Abschnitt 6, stellen wir zunächst B–Splinekurven und –flächen vor. Bei der Lagebestimmung benötigen wir für eine Kurve oder Fläche $\mathbf{p}$ nur den Wert von $\mathbf{p}$ zu einem gegebenen Parameter und die erste Ableitung dazu. Damit können alle angegebenen Verfahren zur Lagebestimmung auch mit Kurven bzw. Flächen eingesetzt werden, die nicht als B–Splines sondern auf andere Weise definiert sind. Erst bei der Konturkorrektur sind wir darauf angewiesen, daß $\mathbf{p}$ ein B–Spline ist.

Im letzten Abschnitt gehen wir näher auf die Bestimmung des Abstands eines Punkts zu einer Kurve oder Fläche ein.

1. Minimierung von Funktionen auf $\mathbb{R}$

Zur Minimierung von Funktionen verwenden wir den Algorithmus *Brents Methode*, wie er in (Press et al., 1988) vorgestellt wird. Er verwendet Funktions– und Ableitungsinformation, um das Minimum einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu finden. Gleichzeitig unterhält er für jeden Schritt i ein Intervall (a_i, b_i); das Minimum wird nur in diesem Intervall gesucht. Beim Aufruf muß zusammen mit einem Startwert für das Minimum auch ein Startintervall (a_0, b_0) angegeben werden.

Vor dem Schritt i haben wir folgende Situation: wir besitzen drei Werte $w < x_i < v$ im Intervall (a_i, b_i); dabei ist $f(x_i)$ der kleinste bisher berechnete Funktionswert und $f(w)$ und $f(v)$ die kleinsten bisher berechneten Funktionswerte in den Teilintervallen (a_i, x_i) bzw. (x_i, b_i). Der Wert der Ableitung $f'(x_i)$ gibt an, in welchem der beiden Teilintervalle wir das Minimum suchen müssen. Wenn $f'(x_i)$ positiv ist, suchen wir im Teilintervall (a_i, x_i). Dazu interpolieren wir die Werte $f'(w)$ und $f'(x_i)$ durch eine lineare Funktion und benutzen die Nullstelle x_{i+1} dieser linearen Funktion als neue Näherung für die Abszisse des Minimums. Wenn $f'(x_i)$ negativ ist, machen wir die entsprechenden Berechnungen für das Teilintervall (x_i, b_i).

Liegt x_{i+1} aber nicht in (a_i, b_i), so benutzen wir den Mittelpunkt des betreffenden Teilintervalls als neue Näherung des Minimums. (Bisektionsverfahren) In beiden Fällen wird aus den berechneten Werten ein kleineres Intervall (a_{i+1}, b_{i+1}) bestimmt.

2. Minimierung von Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$

Zur Minimierung einer Funktion F in n Variablen verwenden wir das *Verfahren der konjugierten Gradienten* aus (Press et al., 1988). Wir setzen es einerseits ein, um den Abstand eines Punkts zu einer Fläche zu berechnen, andererseits um einige nichtlineare Optimierungsprobleme in späteren Kapiteln zu lösen.

Das Verfahren berechnet sukzessive die Minima $\mathbf{a}^{(i)} \in \mathbb{R}^n$ einer Funktion in einer Variablen, nämlich

$$\mathbf{a}^{(i+1)} = \arg\min_{\lambda\in\mathbb{R}} F(\mathbf{a}^{(i)} + \lambda\mathbf{h}^{(i)}). \tag{2.1}$$

Für diese eindimensionale Minimierung wird das Verfahren aus dem letzten Abschnitt eingesetzt.

Die $\mathbf{h}^{(i)}$ werden so gewählt, daß aufeinanderfolgende $\mathbf{h}^{(i)}$ bezüglich der durch die zweite Ableitung von F in $\mathbf{a}^{(i)}$ gegebenen quadratischen Form konjugiert[1] sind. Unter allen Kandidaten $\mathbf{v}$ für $\mathbf{h}^{(i+1)}$ wählen wir den, in dessen Richtung $F(\mathbf{a}^{(i+1)} + \lambda\mathbf{v})$ am stärksten fällt. Für diese Auswahl verwenden wir den Gradienten von F; die zweite Ableitung von F müssen wir dazu nicht explizit kennen — es genügt F und ∇F berechnen zu können.

Wenn F wirklich eine quadratische Form ist, benötigt das Verfahren n Schritte, um das Minimum von F zu erreichen. Dann sind $\mathbf{h}^{(1)}, \ldots, \mathbf{h}^{(n)}$ linear unabhängig und paarweise konjugiert. Für Funktionen, die keine quadratischen Formen sind, gilt das natürlich nicht mehr.

3. Eigenwerte symmetrischer, positiv definiter Matrizen

Die Bestimmung der Eigenwerte und –vektoren einer reellen, symmetrischen und positiv definiten Matrix $\mathbf{M}$ ist wesentlich einfacher als die Eigenwertbestimmung allgemeiner Matrizen. Da wir nur an den Eigenvektoren solcher Matrizen, allerdings aller Eigenvektoren, interessiert sein werden, können wir uns auf diesen Fall beschränken.

Ein sehr stabiles (und schnelles) Verfahren zur Eigenwertbestimmung in diesem Fall besteht aus zwei separaten Schritten: Zunächst wird $\mathbf{M}$ durch Householdertransformation in eine Tridiagonalmatrix umgeformt, danach werden aus dieser mittels LQ–Zerlegung sowohl die Eigenwerte als auch die Eigenvektoren bestimmt.

[1]Zwei Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ sind bezüglich einer quadratischen Form $\mathbf{A}$ konjugiert, wenn $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y} = 0$ gilt.

4. Die Singulärwertzerlegung einer Matrix

Die Singulärwerte einer beliebigen $m \times n$–Matrix $\mathbf{A}$ geben Auskunft über einige wichtige Eigenschaften von $\mathbf{A}$: so ist der betragsgrößte Singulärwert von $\mathbf{A}$ die Spektralnorm von $\mathbf{A}$. Der betragskleinste Singulärwert einer quadratischen Matrix gibt den Abstand von $\mathbf{A}$ zur nächsten singulären Matrix an und ist damit ein Maß für die Kondition der Matrix.(Stoer/Bulirsch, 1978)

Die Singulärwerte von $\mathbf{A}$ sind als Quadratwurzeln der Eigenwerte der quadratischen Matrix $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ definiert. Wir ordnen sie stets absteigend der Größe nach, und bezeichnen sie mit σ_i,

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0. \tag{2.2}$$

Nach (Stoer/Bulirsch, 1978) gibt es zu jeder Matrix $\mathbf{A}$ eine Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{USV}^T$. Dabei ist $\mathbf{U}$ eine orthonormale $m \times m$–Matrix, $\mathbf{V}$ eine orthonormale $n \times n$–Matrix und $\mathbf{S}$ eine $m \times n$–Matrix der folgenden Gestalt:

(2.3)
$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } D = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r) \text{ und } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0.$$

Diese Zerlegung von $\mathbf{A}$ heißt *Singulärwertzerlegung* von $\mathbf{A}$. Mit ihr werden wir die *Pseudoinverse* von $\mathbf{A}$ bestimmen, die im nächsten Abschnitt definiert wird.

Ein effizientes Verfahren zur Berechnung der Singulärwertzerlegung einer Matrix wird in (Press et al., 1988) vorgestellt; dieses Verfahren wurde auch in der Implementierung verwendet.

5. Die Pseudoinverse einer Matrix

Zu jeder $m \times n$–Matrix $\mathbf{A}$ gibt es eine $n \times m$–Matrix $\mathbf{A}^+$, die *Pseudoinverse* (oder Moore–Penrose–Pseudoinverse) von $\mathbf{A}$ heißt, und die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^+\mathbf{A} &= (\mathbf{A}^+\mathbf{A})^T \\ \mathbf{A}\mathbf{A}^+ &= (\mathbf{A}\mathbf{A}^+)^T \\ \mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} &= \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ &= \mathbf{A}^+ \end{aligned}$$

besitzt. Durch diese Eigenschaften ist die Pseudoinverse eindeutig festgelegt. (Stoer/Bulirsch, 1978, Satz 4.8.5.2)

Um nun die Pseudoinverse von $\mathbf{A}$ zu bestimmen, berechnen wir zuerst die Singulärwertzerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{USV}^T$. Wie man anhand der obigen Eigenschaften leicht nachprüft, ist $\mathbf{A}^+ = \mathbf{VS}^+\mathbf{U}^T$. Dabei ist $\mathbf{S}^+$ die Pseudoinverse von $\mathbf{S}$; man erhält sie, indem man alle von Null verschiedenen Elemente in $\mathbf{S}$ durch ihren Kehrwert ersetzt.

6. B–Splines

B–Splines sind eine Darstellung von polynomialen Kurven und Flächen in einer bestimmten Basis, die für geometrische Anwendungen einige Vorteile über die gewohntere Monomdarstellung haben: Die Koeffizienten von B–Splines haben eine geometrische Bedeutung, was das Modellieren mit ihnen erleichtert, und es existieren Algorithmen zu ihrer Auswertung, die numerisch stabiler sind als solche für Polynome in Monomdarstellung. Das Konzept der polynomialen B–Splines läßt sich so erweitern, daß eine größere Klasse von Kurven und Flächen dargestellt werden kann, nämlich die rationalen B–Spline–Kurven und –Flächen.

Wir zitieren hier nur die wichtigsten Definitionen und Ergebnisse. Eine ausführliche Darstellung findet man in (Hoschek/Lasser, 1992), dessen Bezeichnungen wir übernehmen, sowie (Farin, 1994). Weitere Informationen zu rationalen B–Splines findet man in (Piegl, 1991).

Die B–Spline–Funktionen. Diese Funktionen bilden eine Basis des Raums der stückweise polynomialen Funktionen (Splines) vom Grad $k-1$ über einem vorgegebenen Intervall. Wir beschränken uns hier auf das Intervall $[0,1]$.

Die B–Spline–Funktionen sind über einem *Knotenvektor* $\mathbf{T}$ definiert,

$$\mathbf{T} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots, t_{n+k}\}, \tag{2.4}$$

der das Intervall $[0,1]$ in Segmente unterteilt. Die t_i liegen alle in diesem Intervall und sind aufsteigend geordnet, müssen aber nicht alle verschieden sein. Sie werden als *Knoten* oder *Trägerwerte* bezeichnet. Wenn mehrere Knoten $t_{i-1} \neq t_i = \ldots = t_{i+r-1} \neq t_{i+r}$ zusammenfallen, so sagen wir, daß t_i mit der *Vielfachheit* r auftritt.

Die (normalisierten) *B–Spline–Funktionen* N_{ik} sind nun rekursiv über dem Knotenvektor $\mathbf{T}$ definiert, indem man für $k=1$

$$N_{i1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.5}$$

und für $k > 1$

$$N_{ik}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t). \tag{2.6}$$

setzt. es gibt insgesamt $n+1$ verschiedene B–Spline–Funktionen vom Grad k über $\mathbf{T}$. Man beachte, daß der Grad von N_{ik} gleich $k-1$ ist. k heißt die *Ordnung* von N_{ik}.

Sie besitzen einige wichtige Eigenschaften:

(1) $N_{ik}(t) > 0$ für $t \in [t_i, t_{i+k})$. Für alle t außerhalb dieses Intervalls ist $N_{ik}(t) = 0$. $[t_i, t_{i+k}]$ heißt der Träger von N_{ik}.
(2) Die N_{ik} bilden über $[t_{k-1}, t_{n+1}]$ eine Partition der Eins.

(3) Für $t_i \leq t_l \leq t_{i+k}$ ist N_{ik} an den Knoten t_l C^{k-1-r}–stetig; r ist dabei die Vielfachheit von t_l in $\mathbf{T}$. An allen anderen Stellen ist N_{ik} ∞–oft stetig differenzierbar.

B–Spline–Kurven. Die oben aufgeführten Eigenschaften der B–Spline–Funktionen erlauben es, auf einfache Weise Kurven zu erzeugen. Insbesondere ist jeder Kurvenpunkt eine konvexe Kombination der Kontrollpunkte; das erlaubt es, B–Spline–Kurven numerisch stabil mit dem *deBoor–Algorithmus* auszuwerten.

Polynomiale B–Spline–Kurven. Für eine *polynomiale* Kurve in B–Spline–Darstellung benötigen wir neben einem Trägervektor und den darauf definierten Basisfunktionen noch *Kontrollpunkte* (oder deBoor–Punkte) $\mathbf{d}^{(i)} \in \mathbb{R}^n$.

Damit definieren wir eine *B–Spline–Kurve* $\mathbf{p}$ *der Ordnung* k *über dem Träger* $\mathbf{T}$ als

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{d}^{(i)} N_{ik}(t). \tag{2.7}$$

Wir unterscheiden zwischen offenen und geschlossenen Kurven; um eine geschlossene Kurve zu erhalten, müssen die Knoten der Kurve die Bedingung

$$\mathbf{T} = (t_0, t_1, \dots, \mathbf{t}_n, t_{n+1} = t_0, t_{n+2} = t_1, \dots, \mathbf{t}_{n+k} = t_{k-1}) \tag{2.8}$$

erfüllen. Wir setzen den Knotenvektor und die Kontrollpunkte zyklisch fort und haben somit eine Kurve über ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Bei offenen Kurven verlangen wir, daß der erste und letzte Knoten von $\mathbf{T}$ genau k–fach auftritt, also daß die Gleichheit

$$t_0 = t_1 \quad = \dots = t_{k-1} \tag{2.9}$$

$$t_{n+1} = t_{n+2} = \dots = t_{n+k} \tag{2.10}$$

gilt. Dann liegen nämlich $\mathbf{d}^{(0)}$ und $\mathbf{d}^{(n)}$ auf der Kurve. In beiden Fällen verläuft die Kurve innerhalb der konvexen Hülle der Kontrollpunkte, die sich als Approximation der Kurve deuten läßt.

Rationale B–Spline–Kurven. Wir können noch mehr Flexibilität für das Modellieren mit B–Spline–Kurven gewinnen, indem wir rationale B–Splines verwenden. Dazu ordnen wir jedem Kontrollpunkt $\mathbf{d}^{(i)}$ noch ein Gewicht $w^{(i)} \in \mathbb{R}$ zu. Eine *rationale B–Spline–Kurve der Ordnung* k *über dem Knotenvektor* $\mathbf{T}$ ist definiert als

$$\mathbf{p}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w^{(i)} \mathbf{d}^{(i)} N_{ik}(t)}{\sum_{i=0}^{n} w^{(i)} N_{ik}(t)}. \tag{2.11}$$

Wir unterscheiden wieder zwischen offenen und geschlossenen Kurven. An die Knotenvektoren dieser rationalen Kurven stellen wir dieselben Forderungen wie an die Knotenvektoren für polynomiale Kurven.

Wie man der Gleichung (2.11) entnimmt, können wir die Gewichte mit einem gemeinsamen Faktor multiplizieren, ohne die Kurve zu ändern. Vergrößern wir eines der Gewichte, wird die Kurve in der Nähe des zugehörigen Kontrollpunkts zu diesem hingezogen. Setzt man das Gewicht auf null, hat der zugehörige Kontrollpunkt keinen Einfluß auf die Kurve mehr. Näheres dazu findet man in (Piegl, 1991). Wir wollen nur Kurven berücksichtigen, deren Gewichte alle positiv sind. In diesem Fall verläuft auch eine rationale Kurve in der konvexen Hülle der Kontrollpunkte.

Rationale Kurven sind eine Verallgemeinerung der polynomialen Kurven: Setzen wir in Gleichung (2.11) alle $w_i = 1$, so erhalten wir gerade eine polynomiale Kurve.

Tensorproduktflächen. Wir können mit der Tensorproduktdarstellung auf einfache Weise eine Fläche aus zwei Familien von Kurven konstruieren. Eine *polynomiale B–Spline–Tensorproduktfläche* $\mathbf{p}$ mit den Kontrollpunkten $\mathbf{d}^{(ij)} \in \mathbb{R}^s$ mit $0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m$ über den Knotenvektoren

$$\mathbf{U} = (u_0, \dots, u_n, \dots, u_{n+k}) \tag{2.12}$$

$$\mathbf{V} = (v_0, \dots, v_m, \dots, v_{m+l}) \tag{2.13}$$

ist definiert als

$$\mathbf{p}(u, v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \mathbf{d}^{(ij)} N_{ik}(u) N_{jl}(v). \tag{2.14}$$

Die N_{ik} sind die Basisfunktionen der Ordnung k über dem Knotenvektor $\mathbf{U}$, die N_{jl} sind die Basisfunktionen der Ordnung l über dem Knotenvektor $\mathbf{V}$. Man sagt auch, daß $\mathbf{p}$ von der Ordnung (k, l) ist.

Eine solche Fläche kann in jede der beiden Richtungen offen oder geschlossen sein. Entsprechend müssen die Knotenvektoren die Forderungen aus Gleichung (2.8) und (2.9) erfüllen.

In unserer Anwendung sind Gläser i.a. in u–Richtung geschlossen und in v–Richtung offen.

Eine *rationale B–Spline–Tensorproduktfläche* $\mathbf{p}$ mit Kontrollpunkten $\mathbf{d}^{(ij)} \in \mathbb{R}^s$ und Gewichten $w^{(ij)} \in \mathbb{R}$ über den Knotenvektoren $\mathbf{U}$ und $\mathbf{V}$ ist definiert als

$$\mathbf{p}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} w^{(ij)} \mathbf{d}^{(ij)} N_{ik}(u) N_{jl}(v)}{\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} w^{(ij)} N_{ik}(u) N_{jl}(v)}. \tag{2.15}$$

7. Abstandsberechnung

Punkt–Kurve Abstand. Den Abstand eines Punktes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ zu einer ebenen Kurve $\mathbf{p}$ berechnen wir, indem wir das Quadrat der Länge $\mathbf{d}^2$ des *Abstandsvektors*

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{x} - \mathbf{p}(t) \tag{2.16}$$

minimieren. Dazu können wir ein eindimensionales Minimierungsverfahren wie das aus Abschnitt 1 verwenden.

Wir können aber auch ein Verfahren einsetzen, das auf dieses spezielle Problem zugeschnitten ist. In (Hoschek/Lasser, 1992, S. 201) und (Rogers/Fog, 1989) wird ein solches Verfahren vorgestellt. Dazu nähern wir den Fehlervektor durch die ersten Glieder seiner Taylorreihe an:

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{x} - \mathbf{p}(t) \approx \mathbf{x} - \mathbf{p}(t_0) - \dot{\mathbf{p}}(t_0)\Delta t = \tilde{\mathbf{d}}(t), \tag{2.17}$$

wobei $\Delta t = t - t_0$ ist.

Den Abstand minimieren wir nun, indem wir statt

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{d}^2}{\mathrm{d}t} = 2\langle \mathbf{d}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{d}}{\mathrm{d}t}\rangle = 2\langle \mathbf{d}, -\dot{\mathbf{p}}(t)\rangle \tag{2.18}$$

gleich null zu setzen, die Annäherung

$$2\langle \tilde{\mathbf{d}}, -\dot{\mathbf{p}}(t)\rangle = 0 \tag{2.19}$$

nach Δt auflösen. Das ergibt

$$\Delta t_n = \langle \mathbf{x} - \mathbf{p}(t_n), \frac{\dot{\mathbf{p}}(t_n)}{\|\dot{\mathbf{p}}(t_n)\|^2}\rangle. \tag{2.20}$$

Als neuen Parameter benutzen wir

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t_n. \tag{2.21}$$

Konvergenz des Verfahrens. Betrachten wir das obige Verfahren genauer, so finden wir, daß wir mit ihm einen Fixpunkt s der Funktion

$$F(u) = u + \langle \mathbf{x} - \mathbf{p}(u), \frac{\dot{\mathbf{p}}(u)}{\|\dot{\mathbf{p}}(u)\|^2}\rangle \tag{2.22}$$

bestimmen — für $F(s) = s$ steht $\mathbf{d}(s)$ senkrecht auf $\dot{\mathbf{p}}$.

Um die Konvergenz dieser Iteration zu beurteilen, bestimmen wir die erste Ableitung von F:

$$F'(u) = \langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \frac{\ddot{\mathbf{p}}\langle \dot{\mathbf{p}}, \dot{\mathbf{p}}\rangle - \dot{\mathbf{p}}2\langle \dot{\mathbf{p}}, \ddot{\mathbf{p}}\rangle}{\langle \dot{\mathbf{p}}, \dot{\mathbf{p}}\rangle^2}\rangle. \tag{2.23}$$

Im Fixpunkt $s = F(s)$ liegt $\mathbf{x} - \mathbf{p}(s)$ auf der Normalen $\mathbf{n}(s)$ an $\mathbf{p}(s)$, daher läßt sich $\mathbf{x}$ als $\mathbf{x} = \mathbf{p} - a\mathbf{n}$ darstellen. Damit ist

$$F'(s) = -a\frac{\langle \mathbf{n}, \ddot{\mathbf{p}}\rangle}{\langle \dot{\mathbf{p}}, \dot{\mathbf{p}}\rangle}. \tag{2.24}$$

Also verschwindet $F'(s)$, wenn $a = 0$ ist und somit $\mathbf{x}$ schon auf der Kurve $\mathbf{p}$ liegt. Wenn wir voraussetzen, daß $\dot{\mathbf{p}}$ und $\ddot{\mathbf{p}}$ linear unabhängig sind und damit $\langle \mathbf{n}, \ddot{\mathbf{p}}\rangle \neq 0$ gilt, ist das der einzige Fall, in dem $F'(s)$ verschwindet.

Fassen wir diese Betrachtungen zusammen und benutzen noch ein Resultat aus (Boehm/Prautzsch, 1993, S. 66), so erhalten wir das

ERGEBNIS 2.1. *Das Iterationsverfahren aus Gleichung (2.21) konvergiert i.a. linear gegen den Punkt* $\mathbf{p}(s)$*, der minimalen Abstand von* $\mathbf{x}$ *hat. Wenn* $\dot{\mathbf{p}}(s)$ *und* $\ddot{\mathbf{p}}(s)$ *linear unabhängig sind, konvergiert das Verfahren genau dann mit einer höheren (mindestens quadratischen) Ordnung gegen* $\mathbf{p}(s)$*, wenn* $\mathbf{x} = \mathbf{p}(s)$ *ist.*

Punkt–Fläche Abstand. Den Abstand eines Punktes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ von einer Fläche $\mathbf{p}$ bestimmen wir nach derselben Idee wie den Punkt–Kurve–Abstand. Auch dieses Verfahren ist in (Hoschek/Lasser, 1992, S. 273) beschrieben.

Wir müssen nun zwei Parameter anpassen, da $\mathbf{p}$ ja eine Fläche ist. Die Reihenentwicklung des Fehlervektors $\mathbf{d}(u,v) = \mathbf{x} - \mathbf{p}(u,v)$ ergibt näherungsweise

$$\tilde{\mathbf{d}}(u,v) = \mathbf{x} - \mathbf{p}(u_0,v_0) - \mathbf{p}_u(u_0,v_0)\Delta u - \mathbf{p}_v(u_0,v_0)\Delta v \tag{2.25}$$

mit $\Delta u = u - u_0$ und $\Delta v = v - v_0$.

Wir setzen wieder — in Analogie zum Vorgehen bei Kurven — die Annäherung der partiellen Ableitungen von $\mathbf{d}$ nach u und v gleich null,

$$\frac{\partial \mathbf{d}^2}{\partial u} = 2\langle \mathbf{d}, -\mathbf{p}_u\rangle \approx 2\langle \tilde{\mathbf{d}}, -\mathbf{p}_u\rangle, \tag{2.26}$$

$$\frac{\partial \mathbf{d}^2}{\partial v} = 2\langle \mathbf{d}, -\mathbf{p}_v\rangle \approx 2\langle \tilde{\mathbf{d}}, -\mathbf{p}_v\rangle. \tag{2.27}$$

Wenn wir diese Annäherungen nach Δu und Δv auflösen, erhalten wir

$$\Delta u_n = \frac{G\langle \mathbf{d}, \mathbf{p}_u(u_n,v_n)\rangle - F\langle \mathbf{d}, \mathbf{p}_v(u_n,v_n)\rangle}{EG - F^2}, \tag{2.28}$$

$$\Delta v_n = \frac{E\langle \mathbf{d}, \mathbf{p}_v(u_n,v_n)\rangle - F\langle \mathbf{d}, \mathbf{p}_u(u_n,v_n)\rangle}{EG - F^2}. \tag{2.29}$$

E, G und F sind dir Größen der 1. Fundamentalform von $\mathbf{p}$:

$$E = \langle \mathbf{p}_u, \mathbf{p}_u\rangle, \qquad F = \langle \mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v\rangle, \qquad G = \langle \mathbf{p}_v, \mathbf{p}_v\rangle. \tag{2.30}$$

Die verbesserten Parameterwerte sind dann

$$u_{n+1} = u_n + \Delta u_n, \qquad v_{n+1} = v_n + \Delta v_n. \tag{2.31}$$

Aus diesen neuen Parametern berechnen wir solange Korrekturen bis Δu_n und Δv_n unter eine vorgegebene Schranke sinken.

KAPITEL 3

Problemstellung

Wie wir in der Einleitung schon gesehen haben, wird die Lage eines Glases direkt vor dem Schleifen dieses Glases bestimmt; bevor wir überhaupt das Glas mit der Maschine bearbeiten können, muß seine Form, zusammen mit den gewünschten Dekoren, in Crystal–CAD eingegeben worden sein. Wir benötigen zum Messen des Glases auch noch Meßbahnen, die genau wie die Dekore eingegeben werden, nur daß sie stärkeren Beschränkungen als Dekore unterliegen. Diese Eingaben müssen einmal vor der Produktion einer Glasserie gemacht werden. Wenn wir diese Daten haben, können wir ein Glas in die Maschine stellen, es messen, seine Lage berechnen, aus der Lage und den Dekoren Schleifbahnen berechnen und sie schließlich auf das Glas schleifen.

In diesem Kapitel werden wir zunächst die Schleifmaschine ProAxa der Firma ProGlas vorstellen. Wir beschränken uns dabei auf die Beschreibung der Aspekte der Maschine, die für diese Arbeit relevant sind. Ausgehend von dieser Beschreibung stellen wir den Meßvorgang dar, aus dem wir die Daten erhalten, die zur Lagebestimmung erforderlich sind. Anschließend präzisieren wir unser Problem und führen die Bezeichnungen ein, die sich durch den Rest dieser Arbeit ziehen.

1. Gläser und Dekore

Das CAD–System Crystal–CAD stellt alle Kurven und Flächen als rationale B–Splines vom Grad 3 dar. Wir werden in Zukunft den B–Spline, der ein Glas modelliert, als *Idealkontur* bezeichnen; das Glas in der Maschine, an dem gemessen wird, bezeichnen wir als *Meßkontur*. Im allgemeinen sind Gläser keine B–Splines und weichen allein schon deshalb von der Idealkontur ab. Um aber überhaupt eine Lagebestimmung vornehmen zu können, gehen wir davon aus, daß die Meßkontur wirklich eine bewegte Kopie der Idealkontur ist. Diese Annahme ist nur dann sinnvoll, wenn die Idealkontur wirkliche Gläser gut modelliert. Das sicherzustellen ist im Moment noch schwierig: Die Idealkontur wird von Hand in Crystal–CAD eingegeben. Die Vorlagen bei der Eingabe sind gewöhnlich Zeichnungen, nach denen die Gläser gefertigt wurden, und fertige Gläser, von denen weitere Maße genommen werden können. Diese Eingabe ist sehr mühevoll und kann leicht dazu führen, daß die Idealkontur stark von den Gläsern abweicht, und zwar nicht nur weil die Fertigung der Gläser unvermeidlich kleine Fehler in den Gläsern verursacht, sondern auch weil bei der Modellierung

Teile des Glases schlecht dargestellt wurden. Diese Modellierungsfehler machen eine gute Lagebestimmung schwierig; wir lassen sie hier aber außer acht, da bei ProGlas zur Zeit darüber nachgedacht wird, die Gläser künftig mit dem Meßfühler der Maschine „einzuscannen".

Die Idealkontur ist ein rationaler B–Spline $\mathbf{p}$ über dem Parametergebiet $\mathbf{U}$, das in Crystal CAD stets $[0,1] \times [0,1]$ ist. Ein Dekor auf der Idealkontur ist aus Kurvenzügen (den Schliffen) aufgebaut, die später zu einzelnen Schleifbahnen umgerechnet werden. Um eine Kurve $\mathbf{c}$ auf $\mathbf{p}$ zu erhalten, legen wir eine Abbildung $\mathbf{u}$ fest, die das Intervall $[0,1]$ in das Parametergebiet $\mathbf{U}$ abbildet. Die Kurve auf dem Glas ergibt sich dann als $\mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(\mathbf{u}(t))$. Kurven auf dem Glas sind also in Wirklichkeit Kurven im Parametergebiet des Glases. Damit ist die Plazierung der Dekore auf dem Glas von der Parametrisierung der Idealkontur abhängig. Die dürfen wir also bei der Lagebestimmung nicht ändern, da die Dekore sonst an den falschen Stellen auf das Glas geschliffen werden.

2. Die Ansteuerung der Maschine

Die Schleifmaschine verfügt über sechs Achsen, die unabhängig voneinander bewegt werden können. Daher müssen alle Schleifbahnen, die in einer dreidimensionalen Beschreibung vorliegen, in sechsdimensionale Koordinaten umgerechnet werden. Die Funktionsweise der Maschine und die Bedeutung der Achsen soll im folgenden kurz erklärt werden.

Zum Schleifen eines Glases wird es auf eine plane Aufnahmevorrichtung, mit der Öffnung nach unten, gestellt und durch Unterdruck angesaugt (siehe Abbildung 3.1). Der Aufnahmeteller ist in fünf Richtungen beweglich: er läßt sich in alle drei Raumrichtungen (x, y, z) verschieben und kann um die Achse senkrecht zum Teller durch dessen Mittelpunkt um den Winkel a gedreht werden. Außerdem kann der Teller als ganzes noch nach rechts oder links um den Winkel b geneigt werden. Das sind fünf der sechs Maschinenkoordinaten.

Die sechste Maschinenkoordinate gibt den Winkel c einer Drehung der Schleifscheibe gegenüber dem Glas an. Damit läßt sich bei feststehendem Glas die Richtung eines Schliffes steuern.

Im Grunde gibt es noch eine siebte Koordinate: die Zeit. Die Bewegungen in den einzelnen Koordinatenrichtungen sind gewissen Beschränkungen unterworfen: Die zeitliche Veränderung einer Koordinate muß stetig sein, außerdem dürfen die Geschwindigkeit und Beschleunigung einen bestimmten Betrag nicht übersteigen, um Schaden an der Maschine zu vermeiden.

Die Umsetzung von Raumkoordinaten auf Maschinenkoordinaten wird durch ein Steuerprogramm von ProGlas gelöst. Dadurch können wir uns von der Beschreibung in Maschinenkoordinaten lösen und die einfacheren und gewohnten Koordinaten des dreidimensionalen Raums verwenden.

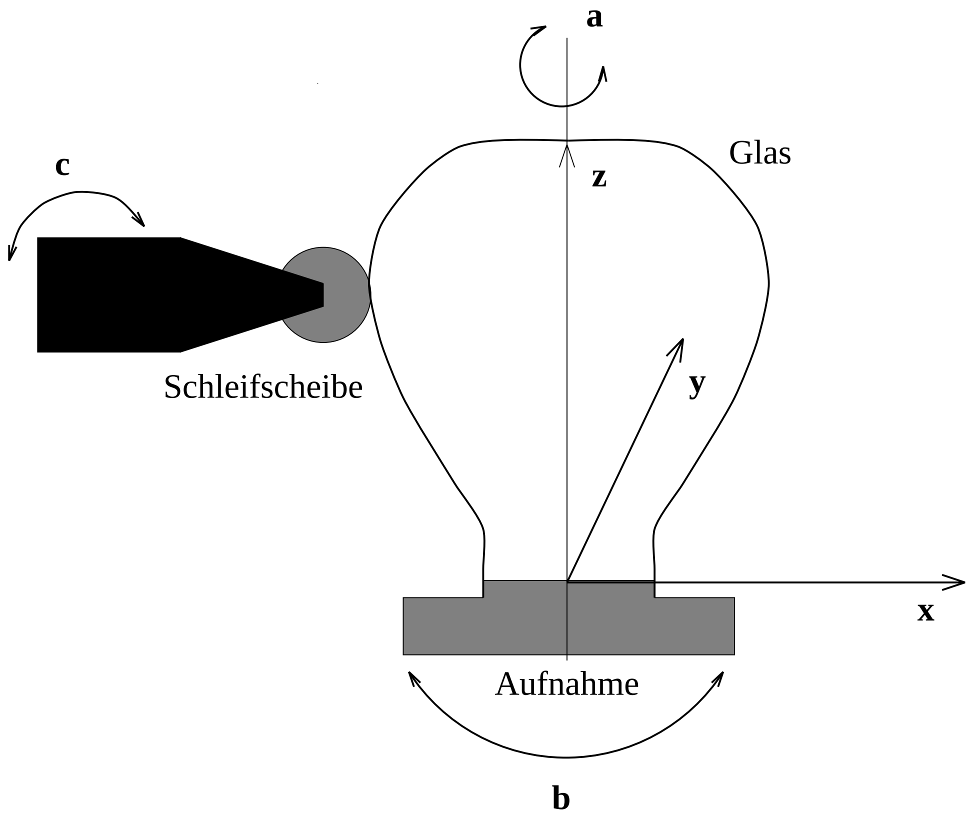

ABBILDUNG 3.1. Die sechs Achsen der Schleifmaschine.

3. Der Meßfühler

Zusätzlich zur Schleifeinrichtung verfügt die Maschine über einen *Meßfühler*, der genauso bewegt werden kann wie die Schleifscheibe; nur der Drehwinkel der Schleifscheibe zum Glas ist ohne belang.

Der Meßfühler ist ein Taster, der fest mit der Maschine verbunden ist. Zum Messen wird daher das Glas am Meßfühler vorbeigeführt. Nur die Spitze des Tasters, die aus einer kleinen Kugel besteht, kann sich in einem gewissen Rahmen bewegen, indem sie vom Glas nach hinten bzw. von einer eingebauten Feder nach vorne gedrückt wird. Um Schäden an der Maschine zu verhindern, muß der Taster stets Kontakt zum Glas haben. Das macht es unmöglich, an den Ecken oder Kanten von Gläsern zu messen, da der Taster dort schon bei kleinen Verschiebungen des Glases von diesem rutschen würde und bei weiteren Bewegungen das Glases abgerissen werden könnte.

4. Meßwerte und -punkte

Beim Messen eines Glases wird der Meßfühler auf einer *Meßbahn* über das Glas geführt. Dabei wird das Glas von der Maschine stets so gehalten, daß der Taster senkrecht auf der Idealkontur steht. Die

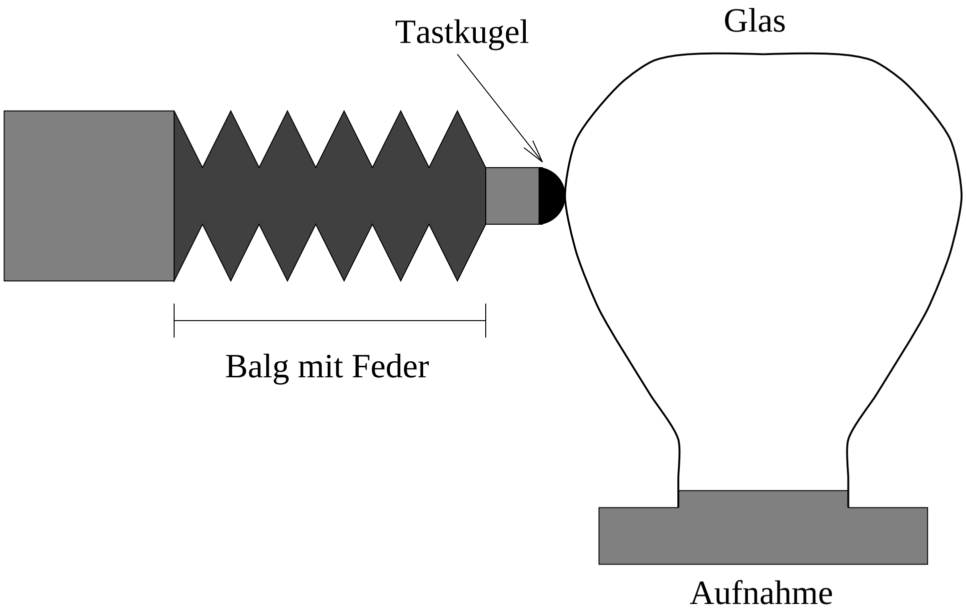

ABBILDUNG 3.2. Schematische Darstellung des Meßfühlers

Bezeichnung	Wert
Auflösung	2,5μm
Max. Auslenkung	$\pm$ 5 mm
Radius der Tastkugel	2 mm

TABELLE 3.1. Wichtige Größen des Meßfühlers.

Meßbahn ist — genau wie ein Schliff — als Kurve im Parametergebiet der Idealkontur definiert. Ein einfaches Beispiel für eine Meßbahn ist ein Höhenring.

Während der Meßfühler sich über eine Meßbahn bewegt, meldet er die Abweichung zwischen der Idealkontur (dem Sollwert) und dem Mittelpunkt der Tastkugel (dem Istwert) an den Steuerrechner. Das geschieht allerdings nicht fortwährend, sondern nur an vordefinierten Punkten, die zusammen mit der Meßbahn festgelegt werden, und zwar meistens so, daß die Meßpunkte gleichmäßig über die Meßbahn verteilt sind.

Die Meßabweichungen werden vom Meßfühler mit einer bestimmten Auflösung über den Bereich der möglichen Auslenkungen des Messfühlers diskretisiert. Die Tabelle 3.1 enthält die wichtigsten Daten des Meßfühlers. Die angegebenen Daten beziehen sich auf den Prototypen der ProAxa–Maschine, auf dem die Meßdaten in Kapitel 6 ermittelt wurden. Neuere Versionen der Maschine unterscheiden sich vom Prototypen dadurch, daß der Meßtaster eine Auflösung von $0,5\mu$m besitzt.

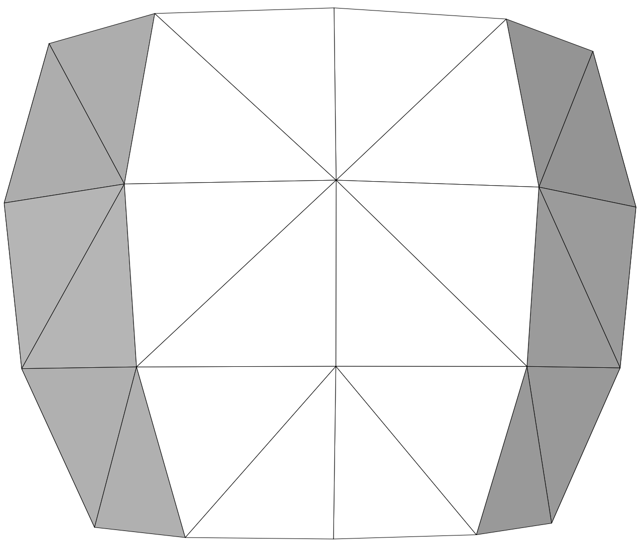

Abbildung 3.3. Ein Meßnetz und seine Zerlegung in Dreiecke.

Nachdem eine Meßbahn an N Punkten abgetastet wurde, erhalten wir für jeden der Punkte, an denen gemessen wurde, ein Zahlentripel $((u_i, v_i), \tau_i)$. Dabei sind (u_i, v_i) die Parameter eines Punktes auf der Idealkontur und τ_i die Abweichung von Idealkontur und Meßkontur in diesem Punkt in Richtung der Normalen auf die Idealkontur in (u_i, v_i). Die Steuersoftware führt schon automatisch eine Tasterkompensation durch: Sie wird nötig, da der Meßfühler den Abstand des Mittelpunkts der Tastkugel zur Idealkontur meldet, wir aber am Abstand des Berührpunkts von Tastkugel und Glas zur Idealkontur interessiert sind. Die Tasterkompensation besteht nun darin, die gemeldete Abweichung um den Radius der Tastkugel zu korrigieren. Der Wert τ_i, mit dem wir arbeiten werden, ist schon auf diese Weise verändert worden.

Um das Glas als ganzes oder auch nur den Ausschnitt, auf dem geschliffen werden soll, untersuchen zu können, ist eine einzelne Meßbahn zu wenig. Wir müssen daher die Meßdaten mehrerer Bahnen miteinander kombinieren. Zur Zeit kann die Software nur Meßdaten verarbeiten,

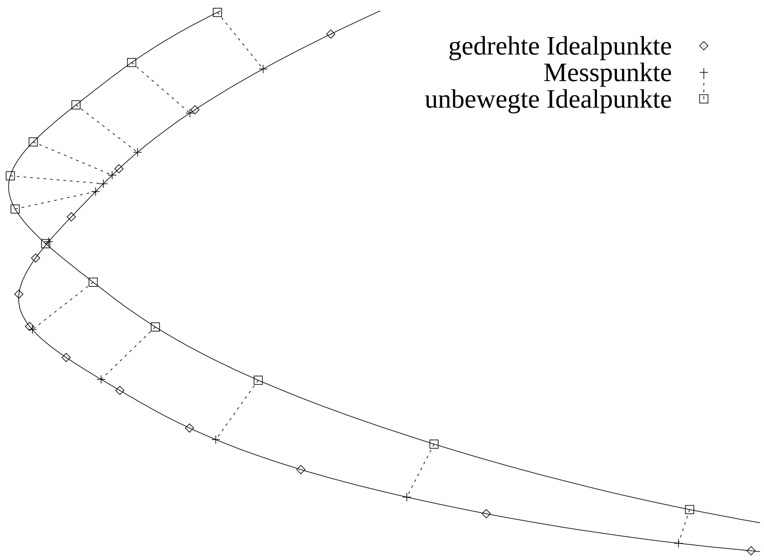

ABBILDUNG 3.4. Verfälschung der Parameter beim Messen.

die ein viereckiges Netz bilden. Die Ecken des Netzes werden dabei von den Meßpunkten gebildet, wie das in Abbildung 3.3 dargestellt ist. Um ein solches Netz zu erhalten, mißt man auf mehreren Höhenringen, und zwar auf jedem Höhenring gleich viele Punkte.

Aus dem Meßvorgang erhalten wir nur die Meß*abweichungen* τ_i; für die Lagebestimmung benötigen wir aber Meß*punkte*. Um aus den Abweichungen Punkte zu berechnen, machen wir uns zunutze, daß der Meßfühler stets senkrecht auf der Idealkontur steht. Damit erhalten wir die Meßpunkte $\mathbf{q}^{(i)}$ als

$$\mathbf{q}^{(i)} = \mathbf{p}(u_i, v_i) + \tau_i \mathbf{n}(u_i, v_i),$$

mit $\mathbf{n}$ als normierter Normalen auf $\mathbf{p}$. Das Vorzeichen von $\mathbf{n}$ wird durch die Richtung bestimmt, in der der Meßfühler positive Abweichungen meldet: $\mathbf{n}$ muß in dieselbe Richtung zeigen.

Das Messen führt zu einer *Verfälschung der Parameter*. Die Abbildung 3.4 gibt ein Beispiel dafür. Die Idealkontur in dieser Abbildung wurde um 8° Grad um ihren Schwerpunkt gedreht. Zu sehen sind die Idealpunkte und die unbewegte Idealkontur sowie die Meßpunkte und die gedrehten Idealpunkte; das sind die Punkte auf der verschobenen Idealkontur die dieselben Parameter wie die Idealpunkte auf der Ausgangskontur haben. Am deutlichsten sieht man, wie der Meßvorgang die Parameter verfälscht an den drei Meßpunkten, die sehr nahe zusammenliegen, obwohl die Idealpunkte fast gleichmäßig über die Kontur verteilt sind.

Die Verfälschung der Parameter stellt die Hauptschwierigkeit bei der Lagebestimmung dar. Wir werden uns daher auch um eine Methode der *Parameteranpassung* bemühen müssen, um die verfälschten Parameter zu korrigieren. Natürlich können wir nichts mehr an den Parametern der $\mathbf{q}^{(i)}$ ändern. Wir müssen also ein Verfahren finden, das die Parameter (u_i, v_i) der Punkte auf der Idealkontur möglichst gut an die wahren Parameter der $\mathbf{q}^{(i)}$ angleicht.

BEZEICHNUNG 3.1. *Zur Abkürzung schreiben wir* $\mathbf{p}^{(i)}$ *für* $\mathbf{p}(u_i, v_i)$ *wenn die Parameterwerte aus dem Zusammenhang klar sind.*

5. Problemstellung

Wir können nach diesen Vorbereitungen das Problem der Lagebestimmung folgendermaßen beschreiben: Gegeben ist eine rationale B–Splinefläche $\mathbf{p}(u, v)$, die wir die *Idealkontur* nennen, sowie N Parameter (u_i, v_i) und dazu gehörende Meßpunkte $\mathbf{q}^{(i)}$, die ein viereckiges Netz bilden. Gesucht ist eine Bewegung $\mathbf{L}$, die aus einer Rotation $\mathbf{R}$ und einer Verschiebung $\mathbf{t}$ besteht, und neue Parameter $(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$, so daß die Punkte $\mathbf{L}(\mathbf{p}(\bar{u}_i, \bar{v}_i))$ möglichst nahe an den Meßpunkten $\mathbf{q}$ liegen. Was wir unter „möglichst nahe“ verstehen, werden wir in den Kapiteln 5 und 6 erläutern.

Es gibt in der Literatur einige Quellen, die sich mit einem ähnlichen Problem befassen. Wir haben die drei Arbeiten (Krumholz, 1986), (Hemdt, 1989) und (Kuhn, 1990) verwendet. (Krumholz, 1986) beschäftigt sich mit der Lagebestimmung für zwei spezielle Formen, nämlich Kreisevolventen und Schraubenlinien. Er setzt zur Lagebestimmung sowohl den Trägheitstensor als auch die Minimierung des mittleren quadratischen Abstands (beide Begriffe werden in Kapitel 5 erläutert) ein. (Hemdt, 1989) und (Kuhn, 1990) bestimmen die Lage alleine über den Trägheitstensor. Sie berücksichtigen zwar eine große Klasse von Kurven und Flächen, gehen aber nicht darauf ein, daß für ein korrektes Ergebnis bei der Lagebestimmung neben der Berechnung einer Bewegung auch eine Anpassung an die Parameter der Meßpunkte nötig ist.

KAPITEL 4

Der Trägheitstensor

In diesem Kapitel erklären wir, wie wir ein affin invariantes Koordinatensystem aus einer gegebenen Menge von Punkten berechnen können. Wenn wir solch ein Koordinatensystem jeweils für die Meß– und die Idealpunkte berechnen, können wir die Lage der Meßkontur dadurch bestimmen, daß wir die beiden Koordinatensysteme durch eine Bewegung eines der beiden Koordinatensysteme zur Deckung bringen.

Zur Berechnung des Koordinatensystems benutzen wir einige metrische Größen aus der Mechanik, die Momente und insbesondere den Trägheitstensor. In diesem Kapitel stellen wir die nötigen Begriffe aus der Mechanik vor und beschreiben, wie wir das affin invariante Koordinatensystem berechnen. Diese Darstellung folgt in weiten Teilen (Lehmann, 1974) und (Lehmann, 1977).

Eine Kraft, die an einem Körper angreift, läßt sich stets in zwei Komponenten zerlegen, eine Verschiebung und eine Drehung. Durch diese Aufspaltung können wir das Verhalten eines Körpers unter Bewegungen nach Verschiebung und Drehung getrennt untersuchen. Für das Ergebnis der Bewegung, die Endlage des Körpers, ist es unwesentlich, ob wir den Körper zuerst verschieben oder erst drehen — die Reihenfolge hat natürlich einen Einfluß auf die Größe des Verschiebungsvektors und die Achsen und Winkel der Drehung.

Eines der wichtigsten Ergebnisse der Mechanik ist, daß sich das Verhalten eines Körpers bei Drehungen und Verschiebungen durch wenige metrische Größen beschreiben läßt.

So genügt es, den Schwerpunkt und die Masse eines Körpers zu kennen, um seine Geschwindigkeit unter der Einwirkung einer Kraft oder seine kinetische und seine potentielle Energie zu bestimmen. Die Kenntnis von Schwerpunkt und Masse eines Körpers erlaubt es auch, Aussagen darüber zu machen, wie schwer es ist, den Körper zu bewegen, und wie man ihn in einem Kraftfeld unterstützen muß, damit er im Gleichgewicht bleibt.

Um auch Aussagen über das Verhalten des Körpers bei Drehungen machen zu können, benötigen wir einige weitere Größen, die Trägheitsmomente; ein Trägheitsmoment bezieht sich immer auf eine bestimmte Drehachse durch einen bestimmten Punkt des Raums. Wie wir weiter unten sehen werden, kann man die Trägheitsmomente für jede beliebige Achse durch jeden beliebigen Punkt bestimmen, wenn man seine

Masse und ein Hauptträgheitssystem (eine bestimmte Basis des affinen Raums) kennt.

Grob gesprochen gibt das Trägheitsmoment zu einer Achse an, wie schwer es ist, den Körper um diese Achse zu drehen. Je weiter der Körper von der Drehachse entfernt ist, umso schwerer ist es, den Körper zu drehen. So dreht man ein Ellipsoid leichter um seine lange Achse als um eine seiner kurzen Achsen. Dies liegt daran, daß die Masse des Körpers näher an der langen Achse als an einer der kurzen Achsen ist und somit die Masse weniger weit bewegt werden muß.

1. Körper und Bezugssysteme

Wir werden *Körper* als Massenverteilungen im Raum ansehen; d.h. ein Körper $\mathbf{K}$ ist eine Menge von Punkten $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, denen eine Masse $\rho(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ zugeordnet ist.

Wir können auch von „Körpern“ in der Ebene sprechen, wenn wir nur Punkte aus dem $\mathbb{R}^2$ zulassen.

In Analogie dazu werden wir Kurven und Flächen als Körper betrachten, die homogen mit Masse belegt sind. Für eine parametrische Kurve oder Fläche $\mathbf{p}$ über dem Parameterbereich $\mathbf{U}$ besteht der zugeordnete Körper aus allen Punkten von $\mathbf{p}$, d.h. $\mathbf{K} = \{\mathbf{p}(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in \mathbf{U}\}$. Jeder dieser Punkte hat Masse 1, also ist $\rho(\mathbf{p}(\mathbf{u})) \equiv 1$.

Wenn wir im folgenden von einem Körper sprechen, gehen wir immer davon aus, daß ihm eine parametrische Kurve oder Fläche zugrunde liegt.

Die Beschreibung des Körpers ist abhängig davon, in welcher Basis des affinen Raums sie erfolgt. Wir werden immer davon ausgehen, daß die Basis eine Orthonormalbasis mit positiver Orientierung ist. Der Einfachheit halber nennen wir eine solche Basis ein *Bezugssystem.*

Momente. Wir haben bisher einen Körper als Menge von Punkten betrachtet. Äquivalent dazu kann man einen Körper auch dadurch charakterisieren, daß man seine *Momente* angibt. Um einen Körper vollständig zu beschreiben, benötigt man i.a. unendlich viele Momente. Für unsere Zwecke genügt es, die drei ersten Momente zu kennen. Das nullte Moment ist die Masse des Körpers, das erste sein Schwerpunkt und das zweite heißt sein Trägheitstensor.

Die Momente sind Größen die man aus der Verteilung der Punkte des Körpers durch Integration bestimmter Funktionen über die Massenverteilung der Punkte gewinnt. Wir müssen daher das Massenelement $\mathrm{dm}(\mathbf{x})$ eines Körpers in Abhängigkeit von der Kurve oder Fläche, die ihm zugrunde liegt, ausdrücken. Das geschieht durch einfache Anwendung der Substitutionsregel.

Für eine parametrische Kurve $\mathbf{p}(t)$ in der Ebene ist das Massenelement $\mathrm{dm}(\mathbf{p}) = \rho\,\mathrm{ds} = \|\dot{\mathbf{p}}\|^2\,\mathrm{dt}$ gleich dem Bogenelement der Kurve.

Falls $\mathbf{p}$ eine geschlossene Kurve ist, können wir auch die Punkte innerhalb der Kurve zu unserem Körper dazunehmen. Das erfordert, daß wir das Innere von $\mathbf{p}$ mittels eines weiteren Parameters parametrisieren. Wenn $\bar{\mathbf{p}}$ diese parametrische Fläche ist, ergibt sich das Massenelement $\mathrm{dm}(\bar{\mathbf{p}})$ als $\mathrm{dm}(\bar{\mathbf{p}}) = \rho\,\mathrm{dA}$, wo dA das Flächenelement von $\bar{\mathbf{p}}$ ist.

Für eine Fläche $\mathbf{p}(u, v)$ im Raum erhalten wir das Massenelement aus der ersten Fundamentalform der Fläche. Es ist

$$\mathrm{dm}(\mathbf{p}) = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{du}\,\mathrm{dv}, \tag{4.1}$$

wobei E, F und G die Größen der ersten Fundamentalform sind:

$$E = \langle \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u} \rangle, \qquad F = \langle \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial v} \rangle, \qquad G = \langle \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial v} \rangle. \tag{4.2}$$

2. Masse und Schwerpunkt

Die *Masse* eines Körpers $\mathbf{K}$ ist definiert als

$$M = \int_{(\mathbf{K})} 1\,\mathrm{dm}(\mathbf{x}) \tag{4.3}$$

und sein *Schwerpunkt* als

$$\mathbf{s} = \int_{(\mathbf{K})} \mathbf{x}\,\mathrm{dm}(\mathbf{x}) \tag{4.4}$$

Die Masse eines Körpers ändert sich bei Bewegungen des Körpers nicht, sein Schwerpunkt ist affin invariant.

Ein Bezugssystem $\mathcal{B}$, in dem der Ursprung mit dem Schwerpunkt von $\mathbf{K}$ zusammenfällt, nennen wir *Schwerpunktsystem.*

3. Der Trägheitstensor

Der Trägheitstensor $\mathbf{J}$ eines Körpers $\mathbf{K}$ im $\mathbb{R}^n$ ist eine symmetrische, positiv definite Bilinearform. Bezüglich einer Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^n$ läßt sich $\mathbf{J}$ als $n \times n$–Matrix darstellen. Das Element $\mathbf{J}_{\mu\nu}$ von $\mathbf{J}$ ist bestimmt durch

$$\mathbf{J}_{\mu\nu} = \int_{(\mathbf{K})} \left(\mathbf{x}^2 \delta_{\mu\nu} - \mathbf{x}_\mu \mathbf{x}_\nu\right) \mathrm{dm}(\mathbf{x}). \tag{4.5}$$

Dabei ist $\delta_{\mu\nu}$ das Kronecker–Delta, $\mathbf{x}$ durchläuft alle Punkte von $\mathbf{K}$ und $\mathrm{dm}(\mathbf{x})$ ist das Massenelement von $\mathbf{K}$.

Die $\mathbf{J}_{\mu\nu}$ heißen *Trägheitsmomente* von $\mathbf{K}$. Genauer bezeichnet man die $\mathbf{J}_{\mu\mu}$ als *axiale Trägheitsmomente (zur Achse μ)* und die $\mathbf{J}_{\mu\nu}$ mit $\mu \neq \nu$ als gemischte Trägheitsmomente.

Die axialen Trägheitsmomente sind stets positiv, während die gemischten sowohl positive als auch negative Werte annehmen können.

Bedeutung der Trägheitsmomente. Die axialen Trägheitsmomente lassen sich als

$$(4.6) \qquad \mathbf{J}_{\mu\mu} = \int_{(\mathbf{K})} \left(\sum_{\substack{1 \le i \le n \\ i \neq \mu}} \mathbf{x}_i^2 \right) \mathrm{dm}(\mathbf{x}) = \int_{(\mathbf{K})} \mathbf{r}_\mu^2(\mathbf{x})\, \mathrm{dm}(\mathbf{x})$$

umschreiben, wobei $\mathbf{r}_\mu(\mathbf{x})$ der Abstand des Punktes $\mathbf{x}$ von der μ–Achse des Bezugssystems ist.

Ergebnis 4.1. *Das axiale Trägheitsmoment zur Achse μ ist ein Maß für den quadratischen Abstand des Körpers von dieser Achse.*

Das Hauptträgheitssystem. Da $\mathbf{J}$ symmetrisch und positiv definit ist, ist $\mathbf{J}$ diagonalisierbar und hat nur positive Eigenwerte. Diese Eigenwerte heißen *Hauptträgheitsmomente* und werden mit $J_1, \ldots, J_n$ bezeichnet; die zugehörigen Eigenräume heißen, falls sie eindimensional sind, *Hauptträgheitsachsen.* Die Eigenräume zu zwei verschiedenen Eigenwerten von $\mathbf{J}$ sind immer orthogonal zueinander.

Wir sind vor allem daran interessiert, auf eindeutige Weise ein Bezugssystem aus den Eigenvektoren des Trägheitstensors zu erhalten. Um das zu erreichen, bilden wir ein Bezugssystem $\mathcal{H}$ aus den Momenten von $\mathbf{K}$ auf folgende Weise:

(1) Der Ursprung von $\mathcal{H}$ ist der Schwerpunkt von $\mathbf{K}$.
(2) Die Richtungen von $\mathcal{H}$ bestehen aus Eigenvektoren von $\mathbf{J}$; wir wählen die Eigenvektoren so, daß
    (a) sie normiert sind,
    (b) ein Rechtssystem bilden,
    (c) für einen Eigenraum mit Dimension größer eins die zugehörigen Eigenvektoren eine orthonormale Basis dieses Eigenraums bilden.
(3) Wir numerieren die Richtungen so, daß die zugehörigen Eigenwerte absteigend sortiert sind: $J_1 \geq J_2 \geq \ldots \geq J_n$.

Ein Bezugssystem $\mathcal{H}$, das diese Forderungen erfüllt, nennen wir ein *Hauptträgheitssystem* für den Körper $\mathbf{K}$. In ihm verschwinden die gemischten Momente.

Wenn alle Eigenwerte von $\mathbf{J}$ verschieden sind, sind die Richtungen der Hauptträgheitsachsen eindeutig festgelegt, da alle Eigenräume eindimensional sind. Das ist der Fall, an dem wir bei der Lagebestimmung interessiert sein werden. Fallen zwei Eigenwerte zusammen, ist der zugehörige Eigenraum (mindestens) zweidimensional; dann können wir jede orthonormale Basis dieses Eigenraums für ein Haupträgheitssystem verwenden und verlieren damit die Eindeutigkeit der Hauptträgheitsachsen, da jetzt jede Richtung dieses Eigenraums eine Hauptträgheitsachse ist. Es gibt dann keine Möglichkeit mehr, bestimmte Richtungen in diesem Eigenraum auszuzeichnen.

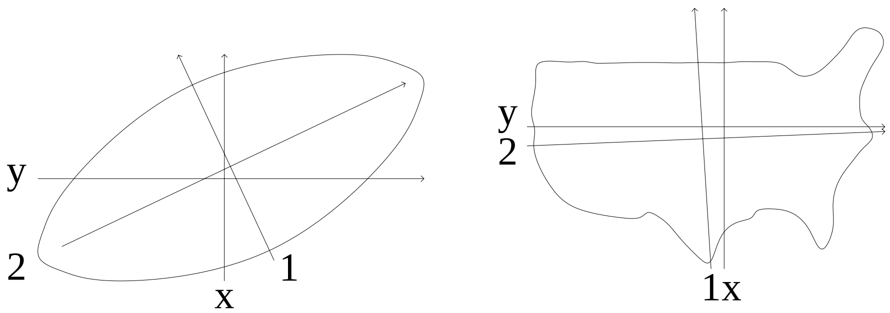

ABBILDUNG 4.1. Zwei Beispiele für die Hauptträgheitsachsen einer Kurve.

Die Abbildung 4.1 enthält zwei Beispiele für das Hauptträgheitssystem eines Körpers in der Ebene. Die Achsen, die mit x und y bezeichnet sind, sind die Koordinatenachsen der Ebene. Die Achsen 1 und 2 sind die Hauptträgheitsachsen des Körpers; sie sind so numeriert, daß das Trägheitsmoment für die Achse 1 größer ist als das für die Achse 2. Der Schnittpunkt der beiden Achsen ist der Schwerpunkt des Körpers. Das Hauptträgheitssystem besteht aus dem Schwerpunkt und den beiden Achsenrichtungen.

4. Bewegung des Bezugssystems

Wir beschäftigen uns nun mit der Frage, wie sich die Momente ändern, wenn wir von einem Bezugssystem zu einem anderen übergehen. Dadurch erfahren wir auch, wie sich die Momente ändern, wenn wir den Körper in einem festen Bezugssystem bewegen.

Drehung des Bezugssystems. Wenn wir das Bezugssystem $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^n$ mittels einer Rotation $\mathbf{R}$ drehen, erhalten wir ein neues Bezugssystem $\mathcal{B}'$. In diesem hat ein Punkt $\mathbf{x} \in \mathbf{K}$ die Koordinaten $\mathbf{x}' = \mathbf{R}\,\mathbf{x}$. Im neuen Bezugssystem hat $\mathbf{J}$ die Darstellung $\mathbf{J}'$ mit

$$\mathbf{J}' = \mathbf{R}\,\mathbf{J}\,\mathbf{R}^T. \tag{4.7}$$

Dann entspricht jede Hauptträgheitsachse $\mathbf{v}_i'$ von $\mathbf{J}'$ einer Hauptträgheitsachse $\mathbf{v}_i$ von $\mathbf{J}$ mit

$$\mathbf{v}_i' = \mathbf{R}\mathbf{v}_i, \tag{4.8}$$

wie man durch Einsetzen von (4.7) und (4.8) in die Gleichung $\mathbf{J}'\mathbf{v}_i' = J_i\mathbf{v}_i'$ sieht.

Verschiebung des Ursprungs aus dem Schwerpunkt. Wenn das Bezugssystem $\mathcal{B}$ ein Schwerpunktsystem ist, läßt sich auf einfache Weise angeben, wie sich die Trägheitsmomente bei einer Verschiebung des Bezugssystems ändern.

Gehen wir vom Bezugssystem $\mathcal{B}$ zum Bezugssystem $\mathcal{B}'$ über, dessen Urspung in bezug auf $\mathcal{B}$ die Koordinaten $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ habe und dessen

Richtungen mit denen von $\mathcal{B}$ übereinstimmen, so hat der Punkt $\mathbf{x}$ die neuen Koordinaten $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{a}$.

Die Komponenten von $\mathbf{J}'$ sind dann

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}'_{\mu\nu} &= \int_{(\mathbf{K})} \left(\mathbf{x}'^2 \delta_{\mu\nu} - \mathbf{x}'_\mu \mathbf{x}'_\nu\right) \mathrm{dm}(\mathbf{x}) \\
&= \delta_{\mu\nu} \left(\int_{(\mathbf{K})} \mathbf{x}^2 \,\mathrm{dm}(\mathbf{x}) - 2\mathbf{a} \int_{(\mathbf{K})} \mathbf{x} \,\mathrm{dm}(\mathbf{x}) + \mathbf{a}^2 \int_{(\mathbf{K})} 1 \,\mathrm{dm}(\mathbf{x}) \right) \\
&\quad - \int_{(\mathbf{K})} \left(\mathbf{x}_\mu \mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}_\mu \mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}_\nu \mathbf{x}_\mu + \mathbf{a}_\mu \mathbf{a}_\nu\right) \mathrm{dm}(\mathbf{x}) \\
&= \mathbf{J}_{\mu\nu} + M(\mathbf{a}^2 \delta_{\mu\nu} - \mathbf{a}_\mu \mathbf{a}_\nu).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Die letzte Umformung ist nur möglich, da $\mathcal{B}$ ein Schwerpunktsystem ist, und in diesem

$$\int_{(\mathbf{K})} \mathbf{x} \,\mathrm{dm}(\mathbf{x}) = \int_{(\mathbf{K})} \mathbf{x}_\mu \,\mathrm{dm}(\mathbf{x}) = 0 \tag{4.10}$$

gilt. M ist die Masse von $\mathbf{K}$. Die Gleichung (4.9) heißt *Satz von Steiner.*

Diese Formel gilt *nur für Verschiebungen aus dem Schwerpunkt* heraus, d.h. wenn $\mathbf{J}$ bezüglich eines Schwerpunktsystems gegeben ist. Im allgemeinen ist diese Formel für Verschiebungen aus Systemen heraus, deren Ursprung nicht der Schwerpunkt ist, falsch.

Ergebnis 4.2. *Die axialen Trägheitsmomente sind in einem Schwerpunktsystem $\mathcal{B}$ kleiner als in jedem anderen Bezugssystem, das man durch Verschiebung von $\mathcal{B}$ erhält.*

Aus Gleichung (4.9) sieht man auch, daß die Hauptachsen eines Trägheitstensors, der nicht im Schwerpunkt berechnet wurde, gegenüber den Hauptträgheitsachsen im Schwerpunkt gedreht sind.

KAPITEL 5

Lagebestimmung in der Ebene

Der Ausgangspunkt dieser Arbeit war die Lagebestimmung von Kurven; dieses Problem tritt auf, wenn man nur einzelne Höhenringe eines Glases betrachtet und versucht, die Lage jedes Höhenrings für sich zu korrigieren.

Es gab bei der Firma ProGlas schon eine Lösung dieses Problems für Rotationsgläser; für solche Gläser vereinfacht sich das Problem etwas, da es zur Lagebestimmung genügt, eine Verschiebung zu berechnen. Dazu wird das Glas auf mehreren Höhenringen abgetastet und die Lage und der Radius jedes Höhenrings separat korrigiert. Die Lage der Höhenringe wird dadurch korrigert, daß der Schwerpunkt der Ideal– und der Meßpunkte zur Deckung gebracht wird.

Wenn die Idealkontur nicht rotationssymmetrisch ist, müssen wir auch noch eine Drehung berechnen. Die Bewegungsberechnung stellt allerdings nicht die Hauptschwierigkeit dar: Für Meßpunkte $\mathbf{q}^{(i)}$, die nur bewegte Kopien der Idealpunkte $\mathbf{p}^{(i)}$ sind, liefert jedes der drei verwendeten Verfahren sehr schnell und mit hoher Genauigkeit eine Lösung. Dabei sind die Lagebestimmung über den Trägheitstensor und die Bahnverfolgung am schnellsten und liefern direkt in einem Schritt eine Lösung.

Der Meßvorgang, wie er in Kapitel 3 beschrieben wurde, verändert die Parameter, zu denen die Meßpunkte gehören; daher weisen das Meß– und das Idealpolygon in der Regel unterschiedliche Formen auf. Die Lagebestimmung kann nur dann mit hoher Genauigkeit durchgeführt werden, wenn es uns gelingt, die Form des Idealpolygons an die des Meßpolygons anzugleichen. Das erfordert eine Korrektur der Parameter der Idealpunkte *nach* der Lagebestimmung.

Wir beschreiben im nächsten Abschnitt das erste Verfahren zur Lagebestimmung; in Abschnitt 2 betrachten wir den Trägheitstensor in der Ebene und zeigen, wie wir das Hauptträgheitssystem für ebene Körper einfach berechnen können. Im darauffolgenden Abschnitt 3 zeigen wir, wie wir die Parameter der Idealpunkte an die Meßpunkte anpassen; die Parameteranpassung wird sowohl bei der Lagebestimmung mit dem Trägheitstensor in Abschnitt 4 als auch für die Lagebestimmung durch Bahnverfolgung in Abschnitt 5 verwendet. Den Abschluß des Kapitels bilden Testergebnisse, die die Arbeitsweise der implementierten Methoden demonstrieren.

1. Minimierung

Ein sehr direkter Ansatz zur Lagebestimmung beruht darauf, einen geeignet definierten Fehler zwischen den Meß– und Idealpunkten zu minimieren. Als Variable der Minimierung verwenden wir zunächst die Bewegung $\mathbf{L}$; um die Verfälschung der Parameter auszugleichen, minimieren wir auch über die Parameter λ_i der Idealpunkte $\mathbf{p}^{(i)}$.

Es gibt sehr viele Möglichkeiten, die Zielfunktion, die minmiert werden soll, zu wählen. In der Technik (Kuhn, 1990) wird oft der *Tschebyscheff–Abstand*

$$\max_i \|\mathbf{q}^{(i)} - \mathbf{p}(\lambda_i)\| \tag{5.1}$$

verwendet. In unserer Anwendung empfiehlt er sich nicht: Wir können leicht einige Meßpunkte mit sehr großen Fehlern erhalten, die von Deformationen des Glases herrühren. Auch wenn der Großteil der Meßpunkte sehr kleine Fehler aufweist, hängt die berechnete Lagekorrektur nur von den sehr schlechten Meßpunkten ab.

Als Maß für den Fehler verwenden wir den *mittleren quadratischen Abstand* zwischen den Meßpunkten und der Ideal*kontur*

$$\begin{aligned} F(\mathbf{R}, \mathbf{t}, \lambda_1, \dots, \lambda_n) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{L}\mathbf{p}^{(i)} - \mathbf{q}^{(i)})^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \big((\mathbf{R}\mathbf{p}(\lambda_i) + \mathbf{t}) - \mathbf{q}^{(i)}\big)^2. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Die Bewegung $\mathbf{L}$ setzt sich aus einer Rotation $\mathbf{R}$ und einer Verschiebung $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$ zusammen, so daß $\mathbf{L}\mathbf{p} = \mathbf{R}\mathbf{p} + \mathbf{t}$ ist. $\mathbf{R}$ ist eine 2×2–Matrix mit

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

Wir werden auch die erste Ableitung von $\mathbf{R}$,

$$\frac{\partial \mathbf{R}_\alpha}{\partial \alpha} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{pmatrix} = \mathbf{R}_{\alpha + \frac{\pi}{2}} \tag{5.4}$$

benötigen. Daraus sehen wir, daß für jeden Punkt $\mathbf{x}$

$$\langle \mathbf{R}\mathbf{x}, \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha}\mathbf{x} \rangle = 0. \tag{5.5}$$

gilt.

Wir können aus Gleichung (5.2) zunächst die Verschiebung entfernen. Dazu betrachten wir die Ableitung von F nach $\mathbf{t}$,

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{t}} = 2\big(\mathbf{t} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{R}\mathbf{p}(\lambda_i) - \mathbf{q}^{(i)})\big) \tag{5.6}$$

und setzen sie gleich Null. Daraus erhalten wir

$$\mathbf{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{q}^{(i)} - \mathbf{R}\mathbf{p}(\lambda_i)). \tag{5.7}$$

Dieser Wert für $\mathbf{t}$ muß ein Minimum von F bezüglich der Verschiebung sein: Für keinen anderen Verschiebungsvektor kann F minimal werden, da (5.7) nur eine Lösung besitzt. $\mathbf{t}$ muß F *minimieren*, da F in bezug auf $\mathbf{t}$ nach oben unbeschränkt ist.

Wenn wir diesen Ausdruck wiederum in die Gleichung (5.2) einsetzen und sie etwas umformen, erhalten wir als neue Zielfunktion

$$\begin{aligned}\bar{F}(\mathbf{R}, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = &\\ &\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{R}\mathbf{p}(\lambda_i) - \mathbf{q}^{(i)})^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(\mathbf{R}\mathbf{p}(\lambda_i) - \mathbf{q}^{(i)}\big)\right)^2.\end{aligned} \tag{5.8}$$

Da wir $\bar{F}$ mit dem Verfahren der konjugierten Gradienten minimieren wollen, benötigen wir auch noch seine Ableitungen nach dem Winkel der Drehung und nach den Parametern der Idealpunkte. Die Ableitung von $\bar{F}$ nach den Parametern λ_j beträgt

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \lambda_j} = \frac{2}{n}\left[\mathbf{R}\mathbf{p}(\lambda_j) + \mathbf{t} - \mathbf{q}^{(j)}\right]\mathbf{R}\dot{\mathbf{p}}(\lambda_j) \tag{5.9}$$

und die nach dem Drehwinkel α — wenn wir noch Gleichung (5.5) beherzigen — ist

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \alpha} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(\mathbf{t} - \mathbf{q}^{(i)}\big)\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha}\mathbf{p}(\lambda_i). \tag{5.10}$$

In diesen Gleichungen verwenden wir $\mathbf{t}$ nicht als Variable, sondern nur als Abkürzung für den Ausdruck aus Gleichung (5.7).

Wir müssen noch eine kleine Änderung an $\bar{F}$ vornehmen, bevor wir es erfolgreich minimieren können: Wir wollen nur Drehwinkel für $\mathbf{R}$ zulassen, die in einem bestimmten Bereich $[-\varphi, \varphi]$ liegen. Dazu müssen wir eine Substitution $\alpha = h(z)$ vornehmen. h muß dazu eine streng monotone Funktion sein und ganz $\mathbb{R}$ auf das Intervall $[-\varphi, \varphi]$ abbilden. Diese Forderungen werden von der Substitution

$$\alpha = \arctan(z)\frac{2\varphi}{\pi} \tag{5.11}$$

erfüllt. Führen wir diese Substitution in $\bar{F}$ aus, so lautet die Ableitung von $\bar{F}(z, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ nach z

$$\frac{\partial \bar{F}(z, \lambda_1, \dots, \lambda_n)}{\partial z} = \frac{\partial \bar{F}(\alpha, \dots)}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial z} = \frac{\partial \bar{F}(\alpha, \dots)}{\partial \alpha}\frac{2\varphi}{\pi(1 + z^2)}. \tag{5.12}$$

Da wir in unserer Anwendung nur die Lage geschlossener Kurven bestimmen wollen, können wir Parameter λ_i aus ganz $\mathbb{R}$ zulassen. Eine Beschränkung der Parameter wird nur für offene Kurven benötigt. Näheres dazu findet man im Abschnitt 1 des Kapitels 6.

2. Der Trägheitstensor in der Ebene

In diesem Abschnitt werden wir den Trägheitstensor eines Körpers in der Ebene genauer untersuchen; solche Körper erhalten wir, wenn wir den Trägheitstensor einer Kurve betrachten.

In der Ebene ist der Trägheitstensor eines Körpers $\mathbf{K}$ eine 2×2–Matrix. Sie ist gegeben durch

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \int_{(\mathbf{K})} \mathbf{x}_2^2 \,\mathrm{dm}(\mathbf{x}) & -\int_{(\mathbf{K})} \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \,\mathrm{dm}(\mathbf{x}) \\ -\int_{(\mathbf{K})} \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \,\mathrm{dm}(\mathbf{x}) & \int_{(\mathbf{K})} \mathbf{x}_1^2 \,\mathrm{dm}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \tag{5.13}$$

Drehung des Bezugssystems. Wenn wir das Bezugssystem um den Winkel α drehen, erhalten wir eine neue Matrix $\mathbf{J}'$ mit

$$\mathbf{J}'_{11} = \frac{1}{2}(\mathbf{J}_{11} + \mathbf{J}_{22}) + \frac{1}{2}(\mathbf{J}_{11} - \mathbf{J}_{22}) \cos 2\alpha + \mathbf{J}_{12} \sin 2\alpha, \tag{5.14}$$

$$\mathbf{J}'_{12} = -\frac{1}{2}(\mathbf{J}_{11} - \mathbf{J}_{22}) \sin 2\alpha + \mathbf{J}_{12} \cos 2\alpha, \tag{5.15}$$

$$\mathbf{J}'_{22} = \frac{1}{2}(\mathbf{J}_{11} + \mathbf{J}_{22}) - \frac{1}{2}(\mathbf{J}_{11} - \mathbf{J}_{22}) \cos 2\alpha - \mathbf{J}_{12} \sin 2\alpha. \tag{5.16}$$

Aus diesen Gleichungen sieht man, daß eine Drehung um $\alpha = \pi$ den Trägheitstensor unverändert läßt.

Wenn wir der Frage nachgehen, für welchen Winkel α die Trägheitsmomente $\mathbf{J}'_{11}$ und $\mathbf{J}'_{22}$ einen Extremwert annehmen, finden wir eine überraschende Antwort: Die Ableitung von $\mathbf{J}'_{11}$ und $\mathbf{J}'_{22}$ nach α ist

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{J}'_{11}}{\mathrm{d}\alpha} = -(\mathbf{J}_{11} - \mathbf{J}_{22}) \sin 2\alpha + 2\mathbf{J}_{12} \cos 2\alpha = 2\,\mathbf{J}'_{12}, \tag{5.17}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{J}'_{22}}{\mathrm{d}\alpha} = (\mathbf{J}_{11} - \mathbf{J}_{22}) \sin 2\alpha - 2\mathbf{J}_{12} \cos 2\alpha = -2\,\mathbf{J}'_{12}. \tag{5.18}$$

Damit verschwindet $\frac{\mathrm{d}\mathbf{J}'_{11}}{\mathrm{d}\alpha}$ und $\frac{\mathrm{d}\mathbf{J}'_{22}}{\mathrm{d}\alpha}$ genau dann, wenn $\mathbf{J}'_{12}$ verschwindet. Das ist aber gerade dann der Fall, wenn die Achsen des Bezugssystems Hauptträgheitsachsen sind.

Ergebnis 5.1. *Im Hauptträgheitssystem $\mathcal{H}$ nehmen die axialen Trägheitsmomente ihren minimalen und maximalen Wert an; in allen anderen Bezugssystemen, die man durch Drehung aus $\mathcal{H}$ erhält, nehmen die axialen Trägheitsmomente Zwischenwerte an.*

Hauptträgheitssystem. Die Hauptträgheitsmomente von $\mathbf{J}$ sind seine Eigenwerte; sie ergeben sich als Lösungen der quadratischen Gleichung $\det(\mathbf{J} - J\mathbf{I}_2) = 0$. Wenn man sie auflöst, erhält man die Lösungen J_1, J_2 als

$$\left.\begin{matrix} J_1 \\ J_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}(J_{11} + J_{22}) \pm \sqrt{(J_{11} - J_{22})^2 + 4J_{12}^2}. \tag{5.19}$$

Um den Winkel α zu bestimmen, um den das Bezugssystem $\mathcal{B}$, in dem wir $\mathbf{J}$ bestimmt haben, gegenüber dem Hauptträgheitssystem $\mathcal{H}$ gedreht ist, lösen wir $\mathbf{J}'_{12} = 0$ nach α auf. Für diesen Drehwinkel hat $\mathbf{J}$ gerade Diagonalgestalt. Aus der Gleichung (5.15) erhalten wir

Ergebnis 5.2. *Das Bezugssystem $\mathcal{B}$, in dem $\mathbf{J}$ berechnet wurde, ist gegenüber dem Hauptträgheitssystem $\mathcal{H}$ um einen Winkel mit*

$$\tan 2\alpha = \frac{2J_{12}}{J_{11} - J_{22}} \tag{5.20}$$

gedreht. Für diesen Winkel haben die axialen Momente $\mathbf{J}'_{11}$ und $\mathbf{J}'_{22}$ einen maximalen und minimalen Wert.

Da tan die Periode π besitzt, ist α nur bis auf Vielfache von $\pi/2$ bestimmt. Eine Drehung um $\pi/2$ vertauscht gerade die beiden axialen Momente. In Abschnitt 3 in Kapitel 4 haben wir aber gefordert, daß $J_1 \geq J_2$ sein soll. Durch diese Forderung ist α also bis auf ganze Vielfache von π bestimmt. Daher hat jeder Körper in der Ebene genau zwei Hauptträgheitssysteme.

Zusammenfallen der Trägheitsmomente. Wir nennen einen Körper $\mathbf{K}$ zum Winkel φ *rotationssymmetrisch*, wenn $\mathbf{K}$ und eine um φ gedrehte Kopie von $\mathbf{K}$ dieselbe Menge von Punkten darstellen. So ist ein Quadrat zum Winkel $\pi/2$ rotationssymmetrisch.

Wenn die beiden Hauptträgheitsmomente eines Körpers $\mathbf{K}$ zusammenfallen, ist jede Richtung der Ebene eine Eigenrichtung. Damit sind dann auch die Trägheitsmomente in jeder dieser Richtungen gleich. Dies sehen wir, indem wir in (5.14)– (5.16) $\mathbf{J}_{11}$ und $\mathbf{J}_{22}$ gleichsetzen und $\mathbf{J}_{12} = 0$ annehmen; das entspricht der Annahme, daß das Bezugssystem, in dem wir $\mathbf{J}$ berechnet haben, ein Hauptträgheitssystem ist.

Wenn wir einmal annehmen, daß $\mathbf{K}$ zu einem Winkel φ mit $0 < \varphi \leq \pi/2$ rotationssymmetrisch ist, so ist $\mathbf{J}' = \mathbf{J}$ in den Gleichungen (5.14)–(5.16). Wenn man diese nach den $\mathbf{J}_{\mu\nu}$ auflöst, findet man, daß dann

$$\mathbf{J}_{11} = \mathbf{J}_{22} \qquad \mathbf{J}_{12} = 0 \tag{5.21}$$

gelten muß.

Ergebnis 5.3. *Bei einem Körper $\mathbf{K}$, der unter Drehungen um einen Winkel kleiner $\pi/2$ rotationssymmetrisch ist, haben alle axialen Trägheitsmomente denselben Wert und alle Richtungen der Ebene sind Hauptträgheitsachsen.*

3. Parameteranpassung

Der Rahmen, in dem die Verfahren zur Lagebestimmung ablaufen, die in den nächsten beiden Abschnitten vorgestellt werden, ist für beide Verfahren gleich: Wir berechnen eine Bewegung $\mathbf{L}$, die die Punkte auf der Idealkontur gut an die Meßpunkte angleicht, und benutzen die neue Bewegung für eine Anpassung der Parameter der Punkte auf der Idealkontur. Die Schritte „Bewegungsberechnung“ und „Parameteranpassung“ iterieren wir solange, bis der Abstand zwischen Ideal– und Meßpunkten sich nicht mehr merklich ändert.

Um nun die Parameter λ_i der Idealpunkte $\mathbf{p}^{(i)} = \mathbf{p}(\lambda_i)$ anzupassen, suchen wir den Punkt auf der bewegten Idealkontur $\mathbf{Lp}$, der $\mathbf{q}^{(i)}$ am nächsten liegt. Dazu verwenden wir entweder ein generelles Minimierungsverfahren und minimieren die Länge des Abstandsvektors $\mathbf{d}^{(i)}(\lambda) = (\mathbf{q}^{(i)} - \mathbf{p}(\lambda))^2$, oder benutzen das direkte Verfahren, das in Kapitel 2 dargestellt wurde. Wir können dieses aber nur dann einsetzen, wenn wir schon einen guten Startwert für den neuen Parameter haben, da es sonst oft nicht in der Lage ist, die Länge des Abstandsvektor $\mathbf{d}^{(i)}(\lambda)$ zu verringern.

Gleichzeitig berechnen wir den mittleren quadratischen Fehler χ^2, den wir als Maß für die Güte der berechneten Lage verwenden,

$$\chi^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{d}^{(i)}(\lambda_i^*)\|^2. \tag{5.22}$$

λ_i^* bezeichnet dabei den neuen Parameter des Idealpunkts $\mathbf{p}^{(i)}$, also den Parameter, den wir bei der Abstandsbestimmung gefunden haben.

4. Lagebestimmung mit dem Trägheitstensor

Wie in Kapitel 4 angegeben sind die Momente eines Körpers $\mathbf{K}$ gewisse Integrale über $\mathbf{K}$. Im Falle der Idealkontur haben wir daher zwei verschiedene Möglichkeiten, die Momente zu berechnen: erstens durch numerische Integration der betreffenden Funktionen über die Idealkontur und zweitens, indem wir die Idealkontur auf einfache Weise approximieren und dann die Integrale für diese einfache Approximation exakt lösen. Für die Meßpunkte empfiehlt sich der zweite Weg, da wir so eine doppelte Approximation — einmal der Meßpunkte durch einen Spline, und dann der Integrale über diesen Spline — vermeiden.

Wir werden daher die Ideal– und Meßkontur durch einen Polygonzug annähern und die Formeln aus Kapitel 4 für Polygone exakt lösen. Diese Lösungen werden im nächsten Unterabschnitt vorgestellt, einmal für den Polygonrand und einmal für die Polygonfläche. Die Einzelheiten der Berechnungen findet man in Anhang A. Danach beschreiben wir, wie wir aus den Momenten die Lage der beiden Konturen bestimmen.

Die Momente eines ebenen Polygons. Wie wir schon oben angedeutet haben, gibt es zwei Arten, aus einem ebenen Polygon einen Körper zu machen: Bei der einen belegen wir nur den Rand des Polygons mit Masse, bei der anderen ordnen wir auch dem Inneren des Polygons Masse zu. Bei der zweiten Methode muß das Polygon natürlich geschlossen sein.

Im folgenden seien $\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)}, \ldots, \mathbf{p}^{(n+1)}$ die Ecken des Polygons. Bei einem geschlossenen Polygon setzen wir $\mathbf{p}^{(1)} = \mathbf{p}^{(n+1)}$.

Um die Darstellung der Formeln für die Trägheitsmomente zu vereinfachen, spalten wir $\mathbf{J}_{\mu\nu}$ folgendermaßen auf:

$$\mathbf{J}_{\mu\nu} = A\delta_{\mu\nu} - B_{\mu\nu} \tag{5.23}$$

mit

$$A = \int_{(\mathbf{K})} \mathbf{x}^2 \,\mathrm{dm}(\mathbf{x}) \tag{5.24}$$

$$B_{\mu\nu} = \int_{(\mathbf{K})} \mathbf{x}_\mu \mathbf{x}_\nu \,\mathrm{dm}(\mathbf{x}) \tag{5.25}$$

Momente des Rands. Zur Berechnung der Momente spalten wir das Polygon in Teilstrecken auf, die jeweils von zwei benachbarten Punkten des Polygons gebildet werden, berechnen die Momente dieser Teile und setzen daraus das Moment des gesamten Polygons zusammen.

$\mathbf{R}$ bezeichne den Rand des Polygons, l_i sei die Länge des i–ten Teilstücks von $\mathbf{R}$, $l_i = \mathrm{d}(\mathbf{p}^{(i)}, \mathbf{p}^{(i+1)})$.

Die Masse von $\mathbf{R}$ ist der Umfang von $\mathbf{R}$,

$$M = \sum_{i=1}^{n} l_i. \tag{5.26}$$

Der Schwerpunkt von $\mathbf{R}$ ist das mit den Längen gewichtete Mittel der Mittelpunkte aller Teilstücke von $\mathbf{R}$,

$$\mathbf{s} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(\mathbf{p}^{(i)} + \mathbf{p}^{(i+1)}) l_i. \tag{5.27}$$

Die Trägheitsmomente von $\mathbf{R}$ ergeben sich aus

$$A = \sum_{i=1}^{n} l_i \frac{1}{3}\big(\mathbf{p}^{(i)}\mathbf{p}^{(i)} + \mathbf{p}^{(i)}\mathbf{p}^{(i+1)} + \mathbf{p}^{(i+1)}\mathbf{p}^{(i+1)}\big), \tag{5.28}$$

(5.29)

$$B_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^{n} l_i \frac{1}{3}\big(\mathbf{p}^{(i)}_\mu \mathbf{p}^{(i)}_\nu + \mathbf{p}^{(i+1)}_\mu \mathbf{p}^{(i+1)}_\nu + \frac{1}{2}(\mathbf{p}^{(i)}_\mu \mathbf{p}^{(i+1)}_\nu + \mathbf{p}^{(i+1)}_\mu \mathbf{p}^{(i)}_\nu)\big).$$

Momente der Fläche. Sei $\mathbf{F}$ die Fläche, die von dem (geschlossenen) Polygon umspannt wird. Die Momente von $\mathbf{F}$ berechnen wir, indem wir $\mathbf{F}$ in Dreiecke aufteilen und deren Momente berechnen. Das i–te Teildreieck wird dabei von den Punkten $\mathbf{p}^{(i)}$, $\mathbf{p}^{(i+1)}$ und dem Ursprung des Koordinatensystems gebildet; $w_i = \frac{1}{2}\det(\mathbf{p}^{(i)}, \mathbf{p}^{(i+1)})$ sei seine Fläche.

Die Masse von $\mathbf{F}$ ist die Fläche

$$M = \sum_{i=1}^{n} w_i. \tag{5.30}$$

Der Schwerpunkt von $\mathbf{F}$ ist das gewichtete Mittel der Schwerpunkte der Teildreiecke

$$\mathbf{s} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3}(\mathbf{p}^{(i)} + \mathbf{p}^{(i+1)})w_i. \tag{5.31}$$

Die Trägheitsmomente von $\mathbf{F}$ ergeben sich aus

$$A = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{1}{6}\big(\mathbf{p}^{(i)}\mathbf{p}^{(i)} + \mathbf{p}^{(i)}\mathbf{p}^{(i+1)} + \mathbf{p}^{(i+1)}\mathbf{p}^{(i+1)}\big), \tag{5.32}$$

$$B_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{1}{6}\big(\mathbf{p}^{(i)}_\mu \mathbf{p}^{(i)}_\mu + \frac{1}{2}(\mathbf{p}^{(i)}_\mu \mathbf{p}^{(i+1)}_\nu + \mathbf{p}^{(i)}_\nu \mathbf{p}^{(i+1)}_\mu) + \mathbf{p}^{(i)}_\mu \mathbf{p}^{(i+1)}_\nu\big). \tag{5.33}$$

Berechnung der Lage. Bevor wir die Lage bestimmen, müssen wir uns entscheiden, ob wir die Momente als Momente des Polygonrands oder der Polygonfläche berechnen; die angegebenen Schritte sind bei beiden Möglichkeiten dieselben.

Seien $\mathbf{s}^{\mathbf{p}}$ und $\mathbf{s}^{\mathbf{q}}$ die Schwerpunkte der Ideal– und der Meßpunkte und $\mathbf{J}^{\mathbf{p}}$ und $\mathbf{J}^{\mathbf{q}}$ ihre Trägheitstensoren in den jeweiligen Schwerpunkten. Nach Gleichung (5.20) bestimmen wir nun die Winkel $\alpha^{\mathbf{p}}$ und $\alpha^{\mathbf{q}}$, um den der jeweilige Trägheitstensor gegenüber dem Bezugssystem verdreht ist.

Nun können wir den Drehwinkel φ und die Verschiebung $\mathbf{t}$ der Bewegung $\mathbf{L}$, die $\mathbf{p}$ in $\mathbf{q}$ überführt, aus der folgenden Gleichung berechnen:

$$\varphi = \alpha^{\mathbf{q}} - \alpha^{\mathbf{p}}, \tag{5.34}$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{s}^{\mathbf{q}} - \mathbf{R}_\varphi(\mathbf{s}^{\mathbf{p}}). \tag{5.35}$$

Wir müssen dabei noch berücksichtigen, daß jeder Körper in der Ebene zwei Hauptträgheitssysteme besitzt, die wir nicht unterscheiden können. Um dennoch eine eindeutige Lösung für φ zu erhalten, nehmen wir an, daß Idealkontur und Glas um weniger als 45° Grad gegeneinander verdreht sind.

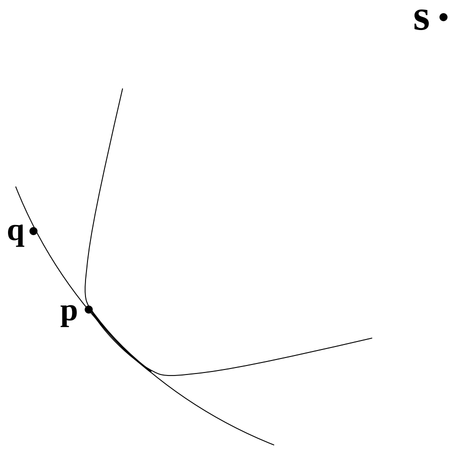

Abbildung 5.1. Berührpunkte

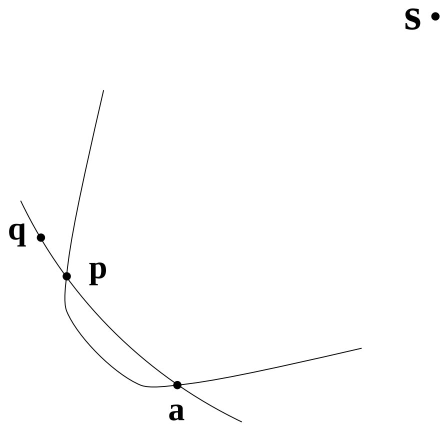

Abbildung 5.2. Verdeckung

5. Lagebestimmung durch Bahnverfolgung

Dreht man einen Körper, so bewegen sich seine Punkte auf Kreisbahnen. Das ist die Grundidee, auf der die Bahnverfolgung beruht. Wenn das gemessene Glas gegenüber der Idealkontur um den Punkt $\mathbf{z}$ gedreht ist, finden wir das Urbild $\mathbf{p}^{(i)}$ eines Meßpunkts $\mathbf{q}^{(i)}$ auf der Idealkontur $\mathbf{p}$, indem wir den Kreis $\mathbf{k}(\mathbf{z}, r)$ mit Mittelpunkt im Zentrum $\mathbf{z}$ der Drehung und Radius $r = \mathbf{dzq}^{(i)}$ mit der Idealkontur schneiden. Der Winkel $\alpha^{(i)} = \sphericalangle \mathbf{q}^{(i)}\mathbf{z}\mathbf{p}^{(i)}$ sollte zugleich eine gute Näherung des Drehwinkels sein.

Gleichungen. Um die Auswirkung der Verschiebung aus unseren Meßdaten zu entfernen, bewegen wir sowohl die Meßkontur als auch die Idealkontur in ihren Schwerpunkt und benutzen diese als Zentrum der Drehung. Den Schnitt des Kreises $\mathbf{k}$, der jetzte den Mittelpunkt $\mathbf{0}$ hat, mit $\mathbf{p}$ erreichen wir, indem wir die Funktion f,

$$f(\lambda) = \left(\mathbf{q}^{(i)2} - \mathbf{p}(\lambda)^2\right)^2, \tag{5.36}$$

minimieren.

Sei λ_i der Parameter, für den f ein Minimum annimmt. Wir setzen $\mathbf{p}^{(i)} = \mathbf{p}(\lambda_i)$. Der Winkel, um den die Meß– gegenüber der Idealkontur gedreht ist, ergibt sich als

$$\alpha^{(i)} = 2 \arcsin\left(\frac{\mathrm{d}(\mathbf{q}^{(i)}, \mathbf{p}^{(i)})}{2\|\mathbf{q}^{(i)}\|}\right). \tag{5.37}$$

Dieses Verfahren liefert den Drehwinkel in der Regel mit hoher Genauigkeit. Es gibt allerdings einige Situationen, in denen $\mathbf{p}^{(i)}$ und das wahre Urbild von $\mathbf{q}^{(i)}$ sehr stark differieren. Das läßt sich auf zwei Phänomene zurückführen:

Berührpunkte: In der Abbildung 5.1 ist eine solche Situation dargestellt. Am Meßpunkt $\mathbf{q}^{(i)}$, an dem der Kreis $\mathbf{k}$ die Idealkontur nur berührt, führen kleine Ungenauigkeiten des Schwerpunkts $\mathbf{s}$ oder des Meßpunkts $\mathbf{q}^{(i)}$ dazu, daß sich der Schnitt von $\mathbf{k}$ mit der Idealkontur stark vom Urbild von $\mathbf{q}^{(i)}$ unterscheidet.

Verdeckung: In Abbildung 5.2 wird das Urbild $\mathbf{a}$ des Meßpunktes $\mathbf{q}^{(i)}$ durch einen weiteren Schnittpunkt $\mathbf{p}^{(i)}$ von $\mathbf{k}$ mit der Idealkontur verdeckt.

Wahl des Drehwinkels. Durch die oben geschilderten Berechnungen erhalten wir zu jedem Meßpunkt $\mathbf{q}^{(i)}$ einen Winkel $\alpha^{(i)}$. Zur Ermittlung einer Drehung müssen wir aus diesen Winkeln einen auswählen: Da einige der Winkel aus den oben geschilderten Gründen sehr grobe Fehler aufweisen, verwenden wir den Median der $\alpha^{(i)}$ als Drehwinkel φ.

Die Verschiebung bestimmen wir nun wie in Gleichung (5.35), indem wir uns die affine Invarianz der Schwerpunkte zunutze machen.

6. Testergebnisse

In diesem Abschnitt demonstrieren wir unsere Verfahren an einigen geschlossenen Kurven. Zum Test verwenden wir Meßdaten, die wir durch Simulation des Meßfühlers erhalten. Den simulieren wir für eine gegebene Idealkontur $\mathbf{p}$ und Bewegung $\mathbf{L} = (\alpha, (t_1, t_2))$ mit $\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_\alpha \mathbf{x} + (t_1, t_2)^T$, indem wir die Meßpunkte $\mathbf{q}^{(i)}$ an n über das Parameterintervall $[0, 1]$ gleichverteilten Parameterwerten λ_i als Schnittpunkt $\mathbf{a}^{(i)}$ der Normalen mit Richtung $\mathbf{n}(\lambda_i)$ in $\mathbf{p}(\lambda_i)$ mit der verschobenen Idealkontur $\mathbf{L}(\mathbf{p})$ bestimmen.

Bei wirklichen Gläsern ist die Meßkontur keine bewegte Kopie der Idealkontur. Um diese Tatsache zu berücksichtigen, testen wir unsere Verfahren auch mit Meßpunkten $\mathbf{q}^{(i)} = \mathbf{a}^{(i)} + \mathbf{r}^{(i)}$, wo $\mathbf{r}^{(i)}$ ein Punkt ist, dessen Komponenten zufällig und gleichverteilt aus einem Intervall $[-r, r]$ stammen.

Wir stellen die Ergebnisse der Tests in Tabellen dar. Die ersten drei Spalten jeder Tabelle enthalten die Eingabedaten, und zwar die Anzahl der Meßpunkte in der Spalte „n“, den Bereich der zufälligen Verschiebung in der Spalte „r“ und die Summe der quadratischen Abstände zwischen den Meßpunkten und den unbewegten Idealpunkten aus Gleichung (5.22) in der Spalte „χ_0^2“. Für eine feste Anzahl von Meßpunkten und ein festes r wurden stets dieselben Meßpunkte für jedes der Verfahren verwendet, um die Vergleichbarkeit der Resultate zu gewährleisten. Das Ergebnis jedes Testlaufs stellen wir für jedes Verfahren in den drei Spalten „χ^2“, „k“ und „Zeit“ dar. Die Spalte „χ^2“ enthält den Fehler zwischen den Meßpunkten und den bewegten und angepaßten Idealpunkten nach Ausführung des Verfahrens. In der Spalte „k“ geben wir an, wieviele Iterationsschritte nötig waren, um die Bewegung zu berechnen, die zu diesem Fehler führt. Die Spalte „Zeit“ enthält die Rechenzeit in Sekunden, die diese Schritte benötigt haben. Alle Zeiten wurden auf einem Pentium P75 unter OS/2 gemessen; man sollte diese Zeiten mit etwas Vorsicht interpretieren, da Zeitmessungen in einem Multitaskingsystem wie OS/2 stets Schwankungen, die in unserem Beispiel im Bereich einiger Zehntelsekunden liegen, unterworfen sind.

Die Tests wurden beendet, wenn sich χ^2 in zwei aufeinanderfolgenden Schritten um weniger als 10^{-6} geändert hatte bzw. wenn $\chi^2 < 10^{-6}$ wurde. Der Test wurde auch dann abgebrochen, wenn der Fehler in zwei aufeinanderfolgenden Schritten vergrößert wurde. Dieser Fall wird in der Spalte „k“ durch einen Stern angezeigt. Eine 0 in der Spalte „χ^2“ zeigt an, daß der Fehler χ^2 kleiner als 10^{-6} wurde.

In allen Testläufen, in denen der Fehler sehr klein wurde, wurde auch die Bewegung, mit der die Meßdaten ermittelt wurden, aus den Meßdaten und der Idealkontur bestimmt.

Eingabe			Fläche			Rand		
n	r	χ_0^2	χ^2	k	Zeit	χ^2	k	Zeit
16	0	18,42	0	7	0,3	0	4	0,4
32	0	18,11	0	5	0,2	0	4	0,5
32	1	18,08	0,5	9	0,8	0,51	9	1
32	3	22,5	4,45	9	0,8	5,50	10	1,1
64	1	18,71	0,39	6	1,3	0,48	6	1,1
64	3	24,03	3,57	8	1,2	4,92	13	2,2

TABELLE 5.1. Die beiden Methoden der Momentenberechnung im Vergleich. (Kontur aus Abbildung 5.5)

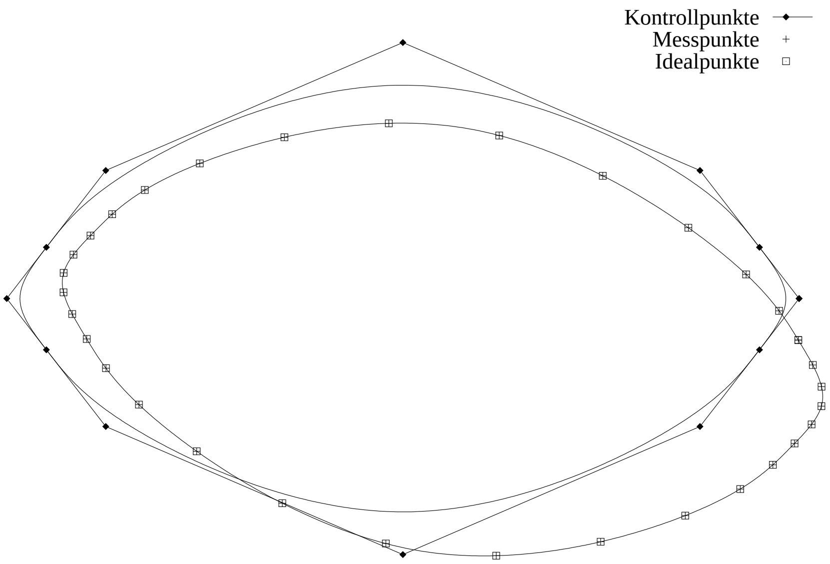

ABBILDUNG 5.3. Testkurve 1.

Momente des Rands und der Fläche. In Abschnitt 2 haben wir zwei verschiedene Wege zur Berechnung der Momente eines geschlossenen Polygons kennengelernt. Die Tabelle 5.1 enthält die Ergebnisse, die wir erhalten wenn wir die Lage mit dem Trägheitstensor berechnen, einmal über die Momente des Rands (Spalten „Rand“) und einmal über die Momente der Fläche (Spalten „Flächen“). Dazu haben wir die Kontur aus Abbildung 5.5 verwendet.

Wir erkennen aus dieser Tabelle, daß die beiden Methoden der Momentenberechnung nahezu gleichwertig sind: die minimalen Fehler, die man in jedem Testlauf erhält, liegen sehr nahe beieinander, wobei die Berechnung der Flächenmomente — besonders bei gestörten Daten — zu etwas geringeren Fehlern führt. Aus diesem Grund werden wir in den folgenden Beispielen zur Lagebestimmung mit dem Trägheitstensors stets die Momente der Polygonfläche verwenden.

Eingabe			Trägheit			Bahnverfolgung			Minimierung		
n	r	χ_0^2	χ^2	k	Zeit	χ^2	k	Zeit	χ^2	k	Zeit
16	0	100,15	0	4	0,1	0	8	0,3	0	171	7,2
32	0	101,15	0	2	0,1	0	2	0,2	0	202	12,5
32	5	134,46	9,49	4	0,4	11,72	14	2,4	9,16	107	22,6
32	7	158,20	18,75	6	0,5	29,04	17	3,2	18,03	108	22,3

TABELLE 5.2. Lagebestimmung für die Kontur aus Abbildung 5.3.

Beispiel 1. In der Abbildung 5.3 ist eine ovale Idealkontur mit ihrem Kontrollpolygon dargestellt. Das Kontrollpolygon paßt in ein 200×100 großes Rechteck. Sie wurde um $(-7°, (10, -8))$ bewegt; die bewegte Idealkontur, auf der sich die Meßpunkte befinden, ist ebenfalls dargestellt. Die Meßpunkte in der Abbildung wurden ohne zufällige Verschiebung ($r = 0$) bestimmt. Vor der Lagebestimmung befinden sich alle Idealpunkte auf der Idealkontur. Nach der Lagebestimmung hat das angewendete Verfahren (Trägheitstensor), die Idealpunkte sehr gut auf der verschobenen Idealkontur plaziert. Auch die Parameter der Meßpunkte werden sehr genau gefunden, was man daran sieht, daß die Meß– und die Idealpunkte nach der Lagebestimmung in der Abbildung zusammenfallen.

Weitere Testläufe mit dieser Kontur sind in der Tabelle 5.2 zusammengestellt, und zwar für jedes der drei vorgestellten Verfahren. Wir sehen, daß jedes der Verfahren die Lage einer ungestörten Meßkontur sehr genau bestimmt. Die Minimierung, die die genauesten Ergebnisse liefert, benötigt auch bei weitem die meiste Rechenzeit. Demgegenüber ist die Lagebestimmung mit dem Trägheitstensor sehr schnell und liefert Ergebnisse von vergleichbarer Güte. Mit der Bahnverfolgung erhält man für gestörte Daten nur sehr schlechte Ergebnisse.

Eingabe			Trägheit			Bahnverfolgung			Minimierung		
n	r	χ_0^2	χ^2	k	Zeit	χ^2	k	Zeit	χ^2	k	Zeit
16	0	64,18	0	5	0,1	0	18	1,4	0	137	9,9
32	0	64,34	0	3	0,3	0	19	3,1	0	152	22,5
128	0	64,32	0	2	0,6	0	24	16,7	0	160	87,4
32	5	94,58	8,63	6	0,6	9,12	*2	0,4	8,45	56	10,1
128	5	88,51	8,51	4	1,3	8,3	*4	2,9	8,19	75	50,4

TABELLE 5.3. Lagebestimmung für die Kontur aus Abbildung 5.4.

Beispiel 2. Die Kontur in Abbildung 5.4 ist eine rationale Kurve. Neben der Idealkontur und ihrem Kontrollpolygon ist die um $(8°, (-2, -10))$ bewegte Idealkontur dargestellt. Das Kontrollpolygon

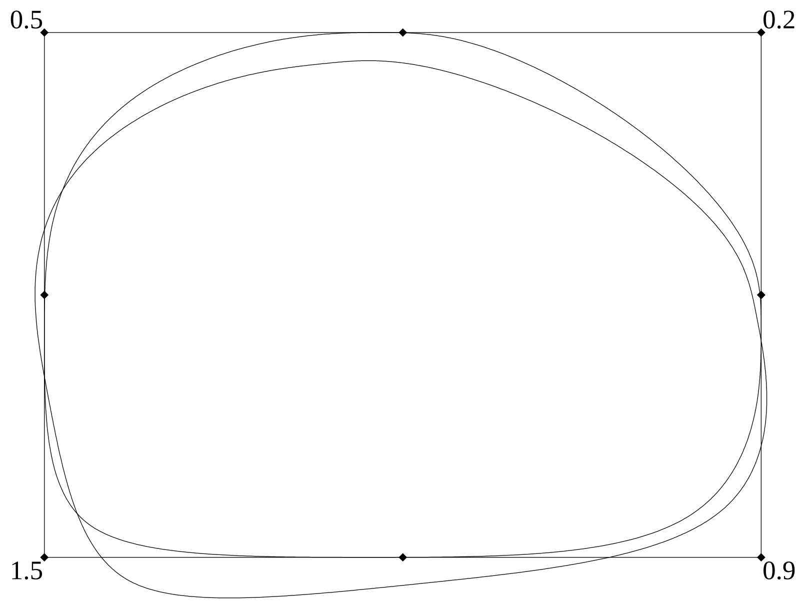

Abbildung 5.4. Testkurve 2.

ist ein 100×100 großes Quadrat. Die Gewichte der Kontrollpunkte sind 1, wenn nichts anderes angegeben ist.

Die Lagebestimmung für eine rationale Kurve birgt gegenüber der mit einer polynomialen Kurve wenig Überraschungen. Auch für diese Konturen bestimmt jedes Verfahren die Lage einer ungestörten Meßkontur sehr genau.

Die Bahnverfolgung schlägt bei diesem Beispiel für gestörte Daten fehl: nach einigen Schritten wird der Fehler vergrößert. Dadurch werden immer schlechtere Bewegungen berechnet, die die Meßkontur und die Idealkontur immer weiter auseinanderbringen.

Die beiden anderen Verfahren arbeiten problemlos, wobei der Rechanaufwand für die Minimierung wieder wesentlich größer ist als der für die Lagebestimmung mit dem Trägheitstensor.

Beispiel 3. In Abbildung 5.5 ist eine weitere polynomiale Idealkontur mit ihrem Kontrollpolygon dargestellt. Das Kontrollpolygon paßt in ein 80×100 großes Rechteck. Die Idealkontur wurde um $(6°, (3, 5))$ bewegt und die auf dieser Kontur bestimmten Meßpunkte wurden durch zufällige Verschiebungen mit $r = 1$ gestört. Die dargestellten Idealpunkte sind die, die man nach der Lagebestimmung durch Minimierung erhält.

Die Tabellen 5.1 und 5.4 enthalten die Ergebnisse der Lagebestimmung für diese Kontur. Auch hier liefert die Lagebestimmung ungestörter Meßdaten über den Trägheitstensor und über Minimierung sehr gute Ergebnisse. Wenn die Meßdaten Störungen unterworfen werden, liefert die Minimierung allerdings deutlich bessere Ergebnisse.

Die Bahnverfolgung vergrößert in den meisten Fällen den Fehler nach wenigen Schritten wieder und liefert Ergebnisse, die wesentlich schlechter als die der beiden anderen Verfahren sind.

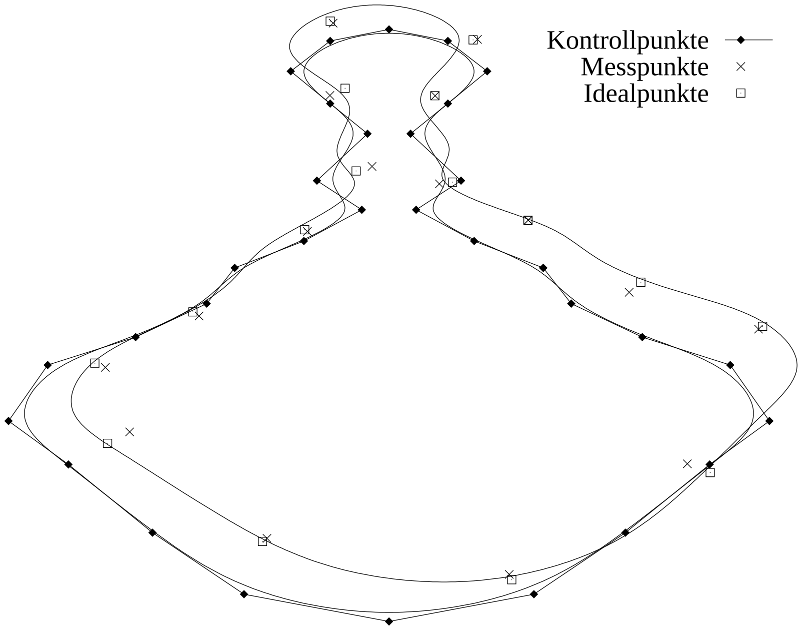

ABBILDUNG 5.5. Testkurve 3.

Eingabe			Minimierung			Bahnverfolgung		
n	r	χ_0^2	χ^2	k	Zeit	χ^2	k	Zeit
16	0	18,42	0	135	5,2	0,44	3	0,1
32	0	18,11	0	143	9,9	0,01	*3	0,2
32	1	18,08	0,39	77	13,7	0,81	*1	0,3
32	3	22,5	3,62	67	13,3	4,84	*2	0,6
64	1	18,71	0,32	62	22,1	1,02	*1	0,8
64	3	24,03	2,87	76	28,2	6,96	*3	1,5

TABELLE 5.4. Lagebestimmung für die Kontur aus Abbildung 5.5.

Beurteilung der Verfahren. Sowohl die Lagebestimmung über den Trägheitstensor als auch durch Minimierung liefern in allen Fällen sehr gute Ergebnisse, sowohl für exakte als auch für gestörte Meßdaten. Die Bahnverfolgung bereitet, besonders bei gestörten Meßdaten, Probleme, und sollte daher in der Praxis nicht eingesetzt werden.

Das beste Verfahren zur Lagebestimmung ist sicherlich das über den Trägheitstensor, da es die Lage sowohl mit hoher Genauigkeit als auch in sehr kurzer Zeit bestimmt. Die Minimierung muß natürlich dann eingesetzt werden, wenn alle Trägheitsmomente der Idealkontur gleich sind, und damit eine Lagebestimmung mit dem Trägheitstensor unmöglich ist.

Es lohnt sich unter Umständen auch, die Minimierung für Meßdaten zu verwenden, die starke Störungen aufweisen, da sie in diesen Fällen bessere Ergebnisse als die Lagebestimmung mit dem Trägheitstensor erzielt. Man erkauft sich die höhere Genauigkeit allerdings durch eine wesentlich größere Rechenzeit.

KAPITEL 6

Lagebestimmung im Raum

Die Lagebestimmung im Raum unterscheidet sich nur unwesentlich von der in der Ebene. Wir können zwei der drei Verfahren, die im letzten Kapitel vorgestellt worden sind, direkt übertragen. Nur die Bahnverfolgung hat keine einfach einsetzbare Entsprechung; die direkte Analogie im Raum wäre der Schnitt einer Kugel mit einer Fläche, was i.a. zu einer ganzen Kurve mit möglichen Urbildern eines Meßpunkts führt.

Wir erläutern in den nächsten beiden Abschnitten, wie sich die Lagebestimmung über den Trägheitstensor und über die Minimierung der quadratischen Abstände übertragen läßt.

1. Minimierung

Die direkte Minimierung kann fast wörtlich übertragen werden, nur daß wir nun drei Drehwinkel statt nur einem berücksichtigen müssen.

Die Verschiebung können wir auf dieselbe Weise wie im letzten Kapitel aus der Minimierung entfernen und erhalten daher als Zielfunktion

$$(6.1)\quad F(\alpha,\beta,\gamma,u_1,v_1,\dots,u_n,v_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{R}_{\alpha\beta\gamma}\mathbf{p}(u_i,v_i)-\mathbf{q}^{(i)})^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{R}_{\alpha\beta\gamma}\mathbf{p}(u_i,v_i)-\mathbf{q}^{(i)}\right)^2.$$

Die Drehung $\mathbf{R}_{\alpha\beta\gamma}$ definieren wir als Produkt von drei Drehungen:

$$(6.2)\qquad \mathbf{R}_{\alpha\beta\gamma} = \mathbf{D}_{\alpha}^{(23)}\mathbf{D}_{\beta}^{(12)}\mathbf{D}_{\gamma}^{(13)}.$$

Dabei beschreibt die Drehmatrix $\mathbf{D}_{\varphi}^{(ij)}$ eine Drehung um den Winkel φ in der (i,j)–Koordinatenebene.

Nachdem wir die Winkel (α,β,γ) bestimmt haben, für die F in (6.1) minimal wird, erhalten wir die Verschiebung als

$$(6.3)\qquad \mathbf{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{R}_{\alpha\beta\gamma}\mathbf{p}^{(i)} - \mathbf{q}^{(i)}.$$

Im Gegensatz zu Drehungen in der Ebene haben wir jetzt nicht mehr die Gleichung $\langle \mathbf{R}x, \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial\varphi}(x)\rangle = 0$ zur Verfügung. Daher lautet die Ableitung von F nach einem der Drehwinkel φ nun

$$(6.4)\qquad \frac{\partial F}{\partial\varphi} = \frac{2}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{R}\mathbf{p}(u_i,v_i)+\mathbf{t}-\mathbf{q}^{(i)})\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\varphi}\mathbf{p}(u_i,v_i)\right]$$

und nach den Parametern

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} = \frac{2}{n}\left[\mathbf{R}\mathbf{p}(u_i, v_i) + \mathbf{t} - \mathbf{q}^{(i)}\right]\mathbf{R}\mathbf{p}_u(u_i), \tag{6.5}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_i} = \frac{2}{n}\left[\mathbf{R}\mathbf{p}(u_i, v_i) + \mathbf{t} - \mathbf{q}^{(i)}\right]\mathbf{R}\mathbf{p}_v(v_i). \tag{6.6}$$

Bei der Minimierung wollen wir wieder nur Drehwinkel aus einem bestimmten Bereich zulassen. Wir verwenden dazu die Substitution aus Gleichung (5.11), die wir schon für Kurven verwendet haben.

Da Gläser i.a. in einer Parameterrichtung offen sind, müssen wir auch die Parameter durch eine Substitution beschränken, um sicherzustellen, daß sie stets im Intervall $[0, 1]$ liegen. Wenn die Fläche $\mathbf{p}$ in v–Richtung offen ist, ersetzen wir v_i durch s_i mit

$$v_i = \frac{\arctan(s_i)}{\pi} + \frac{1}{2}. \tag{6.7}$$

Setzen wir die s_i in F ein, so lautet die Ableitung von F nach s_i

$$\frac{\partial F}{\partial s_i} = \frac{\partial F}{\partial v_i}\frac{\partial v_i}{\partial s_i} = \frac{\partial F}{\partial v_i}\frac{1}{\pi(1+z^2)}. \tag{6.8}$$

Wenn wir nun F auf die beschriebene Weise mit dem Verfahren der konjugierten Gradienten minimieren, stellen wir fest, daß diese Berechnung sehr lange dauert. Das liegt daran, daß wir jedesmal, wenn wir F auswerten, auch die alle Punkte $\mathbf{p}(u_i, v_i)$ neu berechnen müssen, was *sehr* zeitaufwendig ist, besonders da wir i.a. sehr viele Meßpunkte zur Lagebestimmung benötigen (ein typischer Wert sind 150 Meßpunkte und damit 300 Variable für die Parameter in F). Durch Messungen kann man feststellen, daß das Minimierungsverfahren etwa 80–90% seiner Rechenzeit mit Splineauswertungen verbringt.

Um den Rechenaufwand zu senken, können wir uns nun mit einem Trick behelfen, der auch oft bei Interpolations– und Approximationsproblemen angewendet wird. Statt F über Parameter und Drehwinkel zu minimieren, minimieren wir F nur über die Drehwinkel. Diese Minimierung läßt sich sehr schnell durchführen, da dazu keine zeitaufwendigen Splineauswertungen benötigt werden. Wenn wir eine Bewegung bestimmt haben, die F für die festen Parameterwerte minimiert, benutzen wir diese Bewegung, um die Parameter anzupassen.

Zur Anpassung der Parameter bewegen wir die Idealkontur um die gerade berechnete Bewegung und erhalten neue Parameter (u_i, v_i) für die Punkte auf der Idealkontur $\mathbf{p}^{(i)} = \mathbf{p}(u_i, v_i)$, indem wir die Parameter so wählen, daß der Fehlervektor $\mathbf{q}^{(i)} - \mathbf{p}(u, v)$ senkrecht auf $\mathbf{p}$ steht. Dazu verwenden wir wieder eines der Verfahren aus Kapitel 2. Mit den neuen Idealpunkten und den alten Meßpunkten minimieren wir wiederum F. Diese Schritte iterieren wir.

Dieses Vorgehen führt sicher dann zu denselben Ergebnissen wie die Minimierung von F über die Parameter und die Bewegung, wenn der

Startwert für unsere Iteration nahe am Minimum von F ist. In den meisten Fällen werden wir aber ein schlechteres Konvergenzverhalten als bei der vollen Minimierung erhalten.

2. Der Trägheitstensor im Raum

Bestimmen von Hauptträgheitsachsen. Wir zitieren hier einige Aussagen aus (Lehmann, 1977), um ein Gefühl dafür zu vermitteln, welche Richtung die Hauptträgheitsachsen für einen räumlichen Körper haben. Genaueres dazu findet man in (Lehmann, 1977).

TATSACHE 6.1. *Existiert eine* Symmetrie–Ebene *für die Massenverteilung des Körpers, so ist die dazu senkrechte Achse durch den Schwerpunkt des Körpers eine Hauptachse. Existierte eine* Symmetrie–Achse *der Massenverteilung, so ist sie zugleich Hauptachse.*

Daraus lassen sich folgende Regeln ableiten:

(1) Existiert eine Symmetrie–Ebene der Massenverteilung, so liegen zwei Hauptachsen in dieser Ebene; die dritte steht senkrecht auf ihr.
(2) Existieren wenigstens zwei Symmetrie–Ebenen, die nicht orthogonal zueinander sind, so ist der Trägheitstensor rotationssymmetrisch in bezug auf die Schnittgerade dieser beiden Ebenen; die Schnittgerade geht stets durch den Schwerpunkt. In diesem Fall sind mindestens zwei der drei Hauptträgheitsmomente gleich. Ebenso wird der Trägheitstensor bei der Existenz von wenigstens zwei nicht–orthogonalen Symmetrie–Achsen rotationssymmetrisch in bezug auf die dazu normale Achse.
(3) Existieren wenigstens drei Symmetrie–Achsen, von denen keine orthogonal zu einer der anderen ist, so ist der Trägheitstensor kugelsymmetrisch, d.h. die drei Hauptträgheitsmomente fallen zusammen.

Berechnung eines Hauptträgheitssystems. Um aus dem Trägheitstensor $\mathbf{J}$ eines Körpers $\mathbf{K} \subset \mathbb{R}^3$, der in einem Bezugssystem $\mathcal{B}$ gegeben ist, ein Hauptachsensystem $\mathcal{H}$ zu bestimmen, müssen wir nun die kubische Gleichung $\det(\mathbf{J} - J\mathbf{I}_3)$ lösen.

In der Ebene waren wir um die Berechnung der Eigenvektoren herumgekommen, da wir den Drehwinkel zwischen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{H}$ direkt aus $\mathbf{J}$ ablesen konnten. Im Raum müssen wir i.a. drei Drehungen hintereinanderschalten, um $\mathcal{B}$ und $\mathcal{H}$ zur Deckung zu bekommen. Daher empfiehlt es sich, zur Berechnung der Eigenwerte und –vektoren von $\mathbf{J}$ ein geeignetes numerisches Verfahren wie das in Kapitel 2 angegebene zu verwenden.

3. Lagebestimmung mit dem Trägheitstensor

Bevor wir den Trägheitstensor einer Fläche im Raum berechnen können, stellt sich die Frage, wie wir eine Menge von Meß– bzw. Idealpunkten als Körper auffassen wollen.

In der Ebene hatten wir einerseits eine Menge von Punkten durch eine stückweise lineare Kurve interpoliert und den Trägheitstensor für diese Kurve berechnet, andererseits — bei geschlossenen Kurven — den Trägheitstensor für die vom linearen Interpolanten umschlossene Fläche bestimmt.

In unserer Anwendung treten geschlossene Kurven recht häufig auf, z.B. als Höhenring eines Glases, geschlossene Flächen dagegen nie. Gläser sind i.a. in einer Parameterrichtung geschlossen, in der anderen aber offen. Daher übertragen wir nur die erste Art der Trägheitstensorberechnung auf Flächen.

Wie in Kapitel 3 schon angedeutet verlangen wir, daß die Meßdaten in einer ganz bestimmten Form organisiert sind, nämlich als viereckiges Netz (s. Abbildung 3.3). Um die Momente der Fläche zu berechnen, zerlegen wir jede Masche des Netzes in zwei Dreiecke, berechnen die Momente jedes Dreiecks und setzen daraus die Momente des ganzen Netzes zusammen. Die Einzelheiten dazu findet man im Anhang A.

Für ein Dreieck Δ im Raum mit Ecken $\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}, \mathbf{a}^{(3)}$ lauten die Formeln für die Momente des Dreiecks folgendermaßen:

Masse: Die Masse des Dreiecks ist sein Flächeninhalt

$$M(\Delta) = \frac{1}{2}\det(\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}, \mathbf{a}^{(3)}). \tag{6.9}$$

Schwerpunkt: Der Schwerpunkt ist

$$\mathbf{s}(\Delta) = \frac{1}{3}(\mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{a}^{(2)} + \mathbf{a}^{(3)}). \tag{6.10}$$

Trägheitsmoment: Die Trägheitsmomente von Δ sind

(6.11)

$$\mathbf{J}_{\mu\nu}(\Delta) = \delta_{\mu\nu}\frac{M}{6}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i}^{3}\mathbf{a}^{(i)}\mathbf{a}^{(j)} - \frac{M}{12}\sum_{i=1}^{3}(\mathbf{a}_\mu^{(i)}\mathbf{a}_\nu^{(i)} + \sum_{j=1}^{3}\mathbf{a}_\mu^{(i)}\mathbf{a}_\nu^{(j)}).$$

Ein Moment des gesamten Netzes erhalten wir nun, indem wir die Summe über das jeweilige Moment jedes Dreiecks nehmen, das im Netz enthalten ist.

Bewegungsbestimmung. Um eine Bewegung zu finden, die das Meßnetz möglichst gut mit dem Idealnetz zur Deckung bringt, gehen wir wie folgt vor: Zunächst verschieben wir beide Netze in ihren jeweiligen Schwerpunkt $\mathbf{s_p}$ und $\mathbf{s_q}$ und berechnen die Trägheitstensoren $\mathbf{J_p}, \mathbf{J_q}$ und deren Eigenwerte und –vektoren. Die normierten Eigenvektoren sortieren wir so, daß sie ein Hauptträgheitssystem bilden wie das in Abschnitt 3 in Kapitel 4 beschrieben wurde; da es aber immer

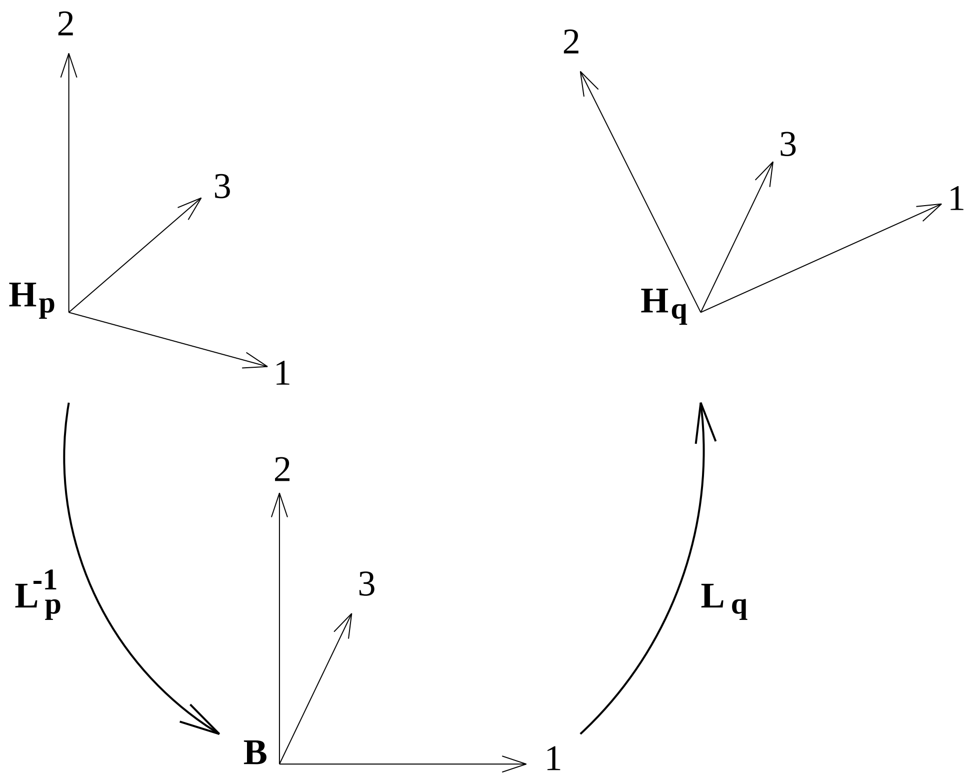

ABBILDUNG 6.1. Die verschiedenen Bezugssysteme, die bei der Lagebestimmung mit dem Trägheitstensor eine Rolle spielen

noch vier Möglichkeiten gibt, aus den drei Hauptträgheitsachsen ein Hauptträgheitssystem zu bilden, müssen wir noch eine weitere Einschränkung machen, um zu einer verwendbaren Rotation zu kommen. Die vier Möglichkeiten kommen dadurch zustande, daß wir die Richtung der ersten und der zweiten Hauptachse frei wählen können.

Um nun eine eindeutige Bewegung bestimmen zu können, benutzen wir, daß das Glas gegenüber der Idealkontur in jeder Richtung um weniger als 90° Grad gedreht ist. Mit dieser Information können wir nun die Eigenvektoren von $\mathbf{J_p}$ ($\mathbf{J_q}$) so in die Spalten einer Matrix $\mathbf{V_p}$ ($\mathbf{V_q}$) schreiben, daß die Spalten dieser Matrix erstens ein Hauptträgheitssystem bilden und zweitens der Winkel zwischen korrespondierenden Spalten von $\mathbf{V_p}$ und $\mathbf{V_q}$ kleiner als 90° Grad ist.

In der Abbildung 6.1 ist schematisch dargestellt, wie wir das Hauptträgheitssystem der Idealkontur in das der Meßkontur überführen. Dabei ist

$$\mathbf{L_p}(\mathbf{x}) = \mathbf{V_p} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{s_p} \tag{6.12}$$

$$\mathbf{L_q}(\mathbf{x}) = \mathbf{V_q} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{s_q}. \tag{6.13}$$

Eingabe		Minimierung			Trägheit		
n	χ_0^2	χ^2	k	Zeit	χ^2	k	Zeit
88	11,137	0,010	992	96	0,073	4	3,3
176	11,142	0,015	831	141,6	0,097	4	6,4
352	11,140	0,019	723	243,9	0,100	4	12,5

TABELLE 6.1. Lagebestimmung für die Kontur aus Bild 6.2 mit simulierten Meßdaten.

Die Bewegung $\mathbf{L}$, bestehend aus der Drehung $\mathbf{R}$ und der Verschiebung $\mathbf{t}$, die das Hauptträgheitssystem $\mathcal{H}_\mathbf{p}$ in das Hauptträgheitssystem $\mathcal{H}_\mathbf{q}$ überführt, können wir nun aus der Gleichung

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_\mathbf{p}^{-1} \circ \mathbf{L}_\mathbf{q} \tag{6.14}$$

bestimmen. Wenn wir die nach $\mathbf{R}$ und $\mathbf{t}$ auflösen, erhalten wir

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}_\mathbf{q}\mathbf{V}_\mathbf{p}^T \tag{6.15}$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{s}_\mathbf{q} - \mathbf{V}_\mathbf{q}\mathbf{V}_\mathbf{p}^T\mathbf{s}_\mathbf{p}. \tag{6.16}$$

4. Testergebnisse

In diesem Abschnitt demonstrieren wir unsere Verfahren an einigen Gläsern. Ein Teil der Beispiele wurde mit den Meßdaten berechnet, die die Schleifmaschine liefert, einige andere durch Simulation des Meßfühlers, die völlig analog zu der Simulation in Abschnitt 6 in Kapitel 5 ist.

Das Problem mit „echten“ Maschinendaten besteht darin, daß die Idealkonturen für diese Gläser noch mit Fehlern behaftet sind, und damit die Lagebestimmung erschweren. Es ist allerdings trotzdem möglich, eine Lagebestimmung vorzunehmen.

Wir stellen die Testergebnisse wieder in Tabellen dar. Die Bezeichnungen in den Tabellen haben genau dieselbe Bedeutung wie in diesem Abschnitt. Wir weisen noch einmal darauf hin, daß die Meßdaten in einem viereckigen Netz organisiert sein müssen. In allen Beispielen haben wir das dadurch erreicht, daß wir auf n_1 Höhenringen jeweils n_2 Meßpunkte bestimmt haben. In den Tabellen ist in der Spalte „n“ jeweils die gesamte Zahl der Punkte $n_1 \cdot n_2$ verzeichnet.

Wir haben allerdings das Abbruchkriterium geändert: Da der Meßfühler der Maschine nur eine Auflösung von $2,5\mu m$ besitzt, wurden die Tests abgebrochen, wenn die relative Änderung des Fehlers in zwei aufeinanderfolgenden Iterationsschritten kleiner als $2,5 \cdot 10^{-3}$ war.

Beispiel 1. In diesem Beispiel demonstrieren wir unsere Verfahren für simulierte Meßdaten. Die Kontur in Abbildung 6.2 wurde auf elf Meßringen abgetastet. Die Ergebnisse der Lagebestimmung sind in Tabelle 6.1 zusammengestellt. Die Meßkontur wurde gegenüber der Idealkontur um $\mathbf{R} = \mathbf{D}_\alpha^{(23)}\mathbf{D}_\beta^{(12)}\mathbf{D}_\gamma^{(13)}$ mit $\alpha = -3°$ und $\beta = \gamma = 1°$

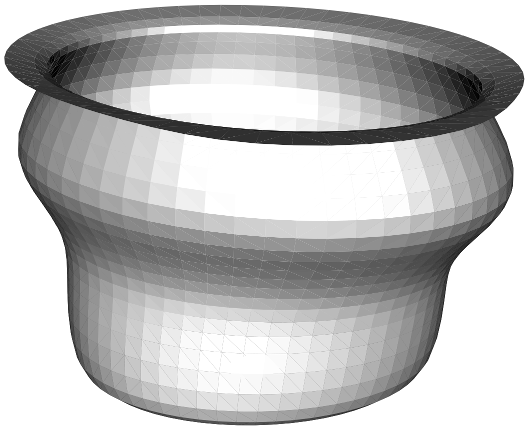

ABBILDUNG 6.2. Testkontur 1.

gedreht und um $\mathbf{t} = (-2, 2, -6)^T$ verschoben. Die Drehwinkel und die Verschiebung dieser Bewegung sind in derselben Größenordnung, wie man sie bei Meßdaten von wirklichen Gläsern findet.

Die Lagebestimmung läßt sich sowohl mit dem Trägheitstensor als auch durch Minimierung des Fehlers sehr gut vornehmen. Auch bei Flächen ist die Minimierung wesentlich langsamer als die Lagebestimmung über den Trägheitstensor. Dafür liefert die Minimierung etwas bessere Werte.

Beispiel 2. In diesem Beispiel verwenden wir Meßdaten, die von der ProAxa–Maschine ermittelt wurden. Wir haben in Abschnitt 1 darauf hingewiesen, daß wir bei der Minimierung der Funktion F sowohl über die Bewegung als auch über die Parameter der Punkte auf der Idealkontur minimieren müssen, aber in der Praxis aber abwechselnd über die Bewegung und die Parameter minimieren, da die Rechenzeit des Verfahrens sonst unakzeptabel groß wird. Wir wollen das an diesem Beispiel demonstrieren.

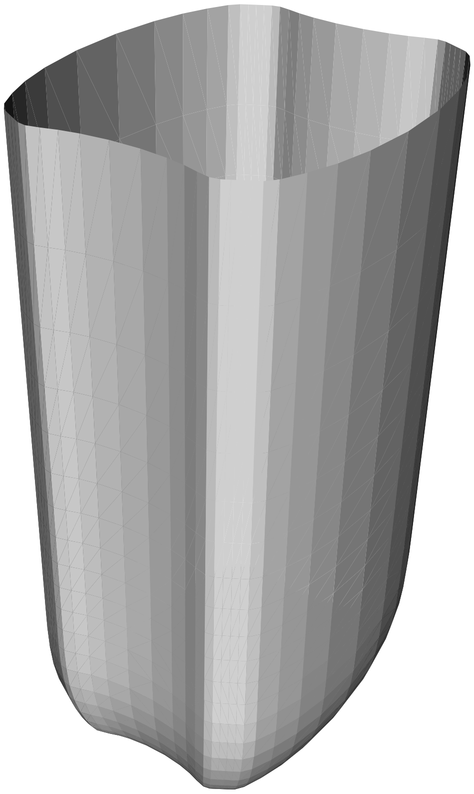

ABBILDUNG 6.3. Testkontur 2.

Eingabe		Mit Parametern			Ohne Parameter		
n	χ_0^2	χ^2	k	Zeit	χ^2	k	Zeit
72	1,803	0,984	282	58,9	0,984	234	20,6
144	1,906	1,08	373	155,7	1,079	267	45,8
288	2,124	1,09	312	269,6	1,09	201	63,7
576	2,116		$**$		1,109	196	124,2
1152	2,102		$**$		1,113	196	251,9

TABELLE 6.2. Lagebestimmung durch Minimierung mit und ohne Parameter für das Glas aus Abbildung 6.3.

Die Tabelle 6.2 enthält die Resultate der Lagebestimmung für das Glas aus Abbildung 6.3, das auf neun Höhenringen abgetastet wurde. An der Tabelle sieht man sehr deutlich, daß beide Vorgehensweisen zu denselben Ergebnissen führen, nur daß die volle Minimierung um den Faktor drei langsamer ist.

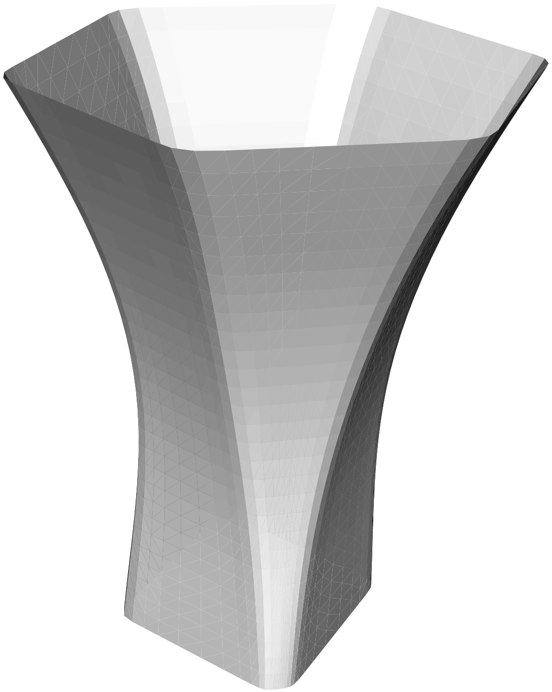

ABBILDUNG 6.4. Testkontur 3.

Eingabe		Minimierung			Trägheit		
n	χ_0^2	χ^2	k	Zeit	χ^2	k	Zeit
56	6,619	2,578	257	22,1	4,37	*2	2,7
84	6,153	2,543	227	33,4	2,525	28	19,8
112	6,257	2,506	178	30,7	2,426	30	26,8
168	6,291	2,371	324	70,9	2,301	41	53,0
224	6,352	2,508	237	79	2,524	28	49,2

TABELLE 6.3. Lagebestimmung für die Kontur aus Abbildung 6.4 mit Maschinendaten.

Beispiel 3. Die Kontur aus Abbildung 6.4 wurde auf sieben Meßringen abgetastet. Die Ergebnisse der Lagebestimmung für diese Kontur findet man in Tabelle 6.3.

Bei der kleinsten Zahl von Meßpunkten $n = 56$ schlägt die Lagebestimmung durch den Trägheitstensor fehl und beginnt nach zwei

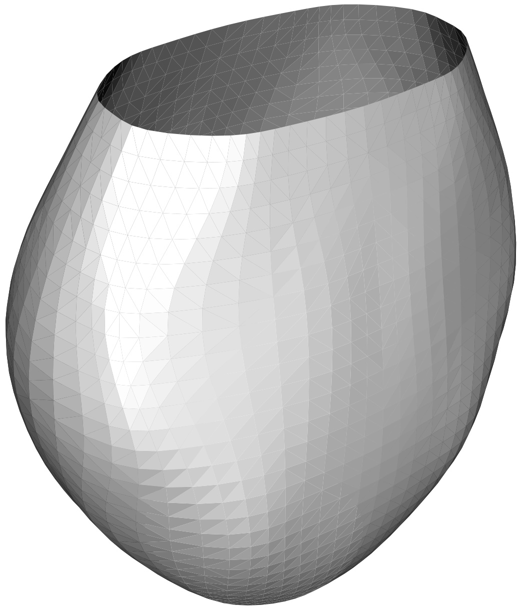

ABBILDUNG 6.5. Testkontur 4.

Eingabe		Minimierung		
n	χ_0^2	χ^2	k	Zeit
8	3,528	1,321	290	17,5
16	3,56	1,181	301	34,1
32	3,477	1,312	138	30,3
64	3,465	1,170	252	106,3
128	3,469	1,17	262	219,5

TABELLE 6.4. Testläufe mit der Kontur aus Bild 6.5 mit Maschinendaten.

Iterationsschritten den Fehler zu vergrößern. Das wird darauf zurückgeführt, daß wir zuwenig Meßpunkte verwenden.

Beispiel 4. Für die Kontur aus Abbildung 6.5 konnte die Lagebestimmung nur über Minimierung berechnet werden.

Beim Verfahren mit dem Trägheitstensor wird der anfängliche Fehler schon im ersten Schritt sehr stark *vergrößert*. Die Bewegung, die in diesem Schritt berechnet wird, enthält einen recht großen Drehwinkel (3°) um die x–Achse, obwohl das Glas in Wirklichkeit, wie wir aus der Minimierung wissen, nur um etwa -0.4° Grad gedreht ist. Das wiederum führt zu einer zu großen Verschiebung der Idealkontur.

Es ist unklar, woran das liegt. Eine Fehlerquelle ist, daß das Modellglas keine gute Annäherung an das wirkliche Glas darstellt. Wir wissen aber nicht, ob das alleine schon der Grund für das schlechte Verhalten des Verfahrens ist.

Beurteilung der Verfahren. Wir haben gesehen, daß sowohl die Lagebestimmung über den Trägheitstensor als auch die Lagebestimmung durch Minimierung gute Ergebnisse liefern. Für diese Verfahren für räumliche Objekte gilt das gleiche wie für die Verfahren in der Ebene: die Minimierung arbeitet genauer, dafür aber viel langsamer als Lagebestimmung mit dem Trägheitstensor.

Bei der Minimierung läßt sich die Geschwindigkeit steigern, wenn wir nicht gleichzeitig über die Bewegung und die Parameter der Meßpunkte minimieren, sondern diese Scritte immer abwechseln.

Eine wichtige Frage, die nicht beantwortet werden konnte, und auf die es auch keine Antwort in der Literatur gibt, lautet: welchen Fehler zwischen den Ideal– und den Meßpunkten verbessert die Lagebestimmung mit dem Trägheitstensor? Wie wir in Beispiel 4 gesehen haben, wäre es sehr wichtig, diese Frage beantworten zu können. Im Moment wissen wir nur, daß das Verfahren in den meisten Fällen sehr gut arbeitet, und in einigen wenigen Fällen fehlschlägt.

KAPITEL 7

Konturkorrektur

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Frage, wie wir die Idealkontur an die Meßdaten anpassen können. Wir können dabei zwei verschiedene Ansätze verfolgen:

(1) Wir können die Meßdaten verwenden, die wir schon zur Lagebestimmung benutzt haben, und sie durch eine neue B–Splinefläche approximieren. Aus dieser neuen Fläche berechnen wir dann neue Schleifbahnen.
(2) Wir können einen zweiten Meßvorgang starten. In diesem messen wir nur entlang der Schleifbahnen und benutzen diese Meßdaten, um die Schleifbahnen neu zu approximieren, ohne die gesamte Fläche neu zu bestimmen.

Beide Methoden haben ihre Vor– und Nachteile: Die Approximation der Meßdaten ist sehr rechenaufwendig und benötigt daher sehr viel Zeit. Aber auch das erneute Messen auf dem Glas benötigt seine Zeit.

In beiden Fällen benötigen wir Verfahren zur Approximation von Kurven und Flächen. Wir haben einerseits die Möglichkeit, die Daten mit einem polynomialen B–Spline zu approximieren, können aber andererseits auch ein Verfahren zur Approximation mit rationalen B–Splines verwenden. Das letztere führt im allgemeinen zu einer besseren Approximation, allerdings zum Preis von sehr viel höherem Rechenaufwand. Welcher Methode man den Vorzug gibt, hängt davon ab, in welchem Verhältnis die Zeit, die die Neuapproximation des gesamten Glases benötigt, zu der Zeit, die das Messen der Schleifbahnen benötigt, stehen. Das hängt sehr stark davon ab, wieviele und wie komplizierte Schliffe auf das Glas aufgebracht werden sollen.

In den nächsten beiden Abschnitten wird je ein Verfahren zur Approximation mit polynomialen und mit rationalen B–Splinekurven vorgestellt. Im dritten Abschnitt zeigen wir, wie diese Verfahren so modifiziert werden können, daß sie zur Approximation einer Punktmenge im Raum mit einer (polynomialen oder rationalen) Tensorproduktfläche verwendet werden können.

Ein kritischer Punkt beim Approximieren von Daten besteht darin, daß man in den meisten Fällen die Parameterwerte, zu denen die Daten gehören, nicht kennt und daher vor der Approximation schätzen muß. Da wir die Approximation in unserer Anwendung in der Regel nach der Lagebestimmung durchführen werden, sind wir in der glücklichen Lage, schon über sehr gute Näherungen für die Parameter der Approximationsdaten (die Meßpunkte) zu verfügen.

1. Approximation mit polynomialen Kurven

Uns stellt sich folgendes Problem: Gegeben seien $m+1$ Punkte $\mathbf{q}^{(i)}$ mit festen Parameterwerten t_i, $0 \le i \le m$ im $\mathbb{R}^d$. Wir suchen eine polynomiale B–Splinekurve $\mathbf{p}$ der Ordnung k mit festem Trägervektor und $n+1$ Kontrollpunkten, die den quadratischen Fehler zwischen den $\mathbf{q}^{(i)}$ und den $\mathbf{p}^{(i)} = \mathbf{p}(t_i)$ minimiert.

Schreiben wir das Problem aus, so lautet es: Finde Kontrollpunkte $\mathbf{d}^{(i)}$, so daß

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{m} \|\mathbf{q}^{(i)} - \mathbf{p}(t_i)\|^2 &= \sum_{i=0}^{m} \|\mathbf{q}^{(i)} - \sum_{j=0}^{n} \mathbf{d}^{(i)} N_{jk}(t_i)\|^2 \\ &= \sum_{l=1}^{d} \|\mathbf{Q}^{(l)} - \Phi \mathbf{D}^{(l)}\|^2\end{aligned} \tag{7.1}$$

minimiert wird.

In der obigen Gleichung wurden die Abkürzungen

$$\Phi = \big(\big(\Phi_{ij}\big)\big) = ((N_{jk}(t_i))), \tag{7.2}$$

$$\mathbf{D}^{(l)} = (\mathbf{d}_l^{(0)}, \mathbf{d}_l^{(1)}, \ldots, \mathbf{d}_l^{(n)}), \tag{7.3}$$

$$\mathbf{Q}^{(l)} = (\mathbf{q}_l^{(0)}, \mathbf{q}_l^{(1)}, \ldots, \mathbf{q}_l^{(m)}). \tag{7.4}$$

verwendet. In allen Gleichnungen ist $0 \le i \le m$, $0 \le j \le n$ und $1 \le l \le d$.

In Gleichung (7.1) wird genau dann ein Minimum erreicht, wenn jeder der Ausdrücke

$$\|\mathbf{Q}^{(l)} - \Phi \mathbf{D}^{(l)}\|^2 \qquad \text{für jedes } l \text{ mit } 1 \le l \le d \tag{7.5}$$

minimal ist. Daher lassen sich die Kontrollpunkte $\mathbf{d}^{(i)}$ durch Lösen von d Gleichungen nach der Methode der linearen kleinsten Quadrate bestimmen, wie es in (Boehm/Prautzsch, 1993) beschrieben wird.

Wie in (Hoschek/Lasser, 1992) beschrieben können wir die Kurve, die wir aus (7.5) erhalten, dazu benutzen, die Parameter t_i der Approximationspunkte $\mathbf{q}^{(i)}$ zu verbessern, indem wir t_i so wählen, daß $\mathbf{p}(t_i)$ der Punkt auf $\mathbf{p}$ ist, der $\mathbf{q}^{(i)}$ am nächsten liegt. Mit diesen verbesserten Parametern können wir nun wieder eine neue Kurve bestimmen.

2. Approximation mit rationalen Kurven

Das Problem der rationalen Approximation läßt sich völlig analog zu dem der polynomialen Approximation beschreiben: gegeben seien $m+1$ Punkte $\mathbf{q}^{(i)}$ mit Parameterwerten t_i, $0 \le i \le m$; finde eine rationale Kurve $\mathbf{p}$ der Ordnung k mit vorgegebenem Trägervektor und $n+1$ Kontrollpunkten

$$\mathbf{p}(t) = \frac{\sum_{j=0}^{n} w_j \mathbf{d}_j N_{jk}(t)}{\sum_{j=0}^{n} w_j N_{jk}(t)}. \tag{7.6}$$

Zur Abkürzung bezeichnen wir den Nenner von $\mathbf{p}(t)$ mit

$$w(t) = \sum_{j=0}^{n} w_j N_{jk}(t). \tag{7.7}$$

Die Lösung dieses Problems ist ausführlich in (Schneider, 1992) behandelt. Wir erklären hier die wichtigsten Punkte des Verfahrens, soweit sie für eine Implementierung wichtig sind.

Wie bei der polynomialen Approximation schreiben wir (7.6) in Matrixform

$$\sum_{l=1}^{d} \|\mathbf{Q}^{(l)} - \Phi(\mathbf{w})\mathbf{D}^{(l)}\|^2. \tag{7.8}$$

Hier verwenden wir, in Anlehnung an Gleichung (7.1), die Bezeichnungen

$$\mathbf{w} = (w_0, w_1, \ldots, \mathbf{w}_n), \tag{7.9}$$

$$\mathbf{D}^{(l)} = (\mathbf{d}_l^{(0)}, \mathbf{d}_l^{(1)}, \ldots, \mathbf{d}_l^{(n)}), \tag{7.10}$$

$$\mathbf{Q}^{(l)} = (\mathbf{q}_l^{(0)}, \mathbf{q}_l^{(1)}, \ldots, \mathbf{q}_l^{(m)}). \tag{7.11}$$

Die Matrix $\Phi(\mathbf{w}) = ((\Phi(\mathbf{w})_{ij}))$ enthält nun die folgenden Einträge:

$$\Phi(\mathbf{w})_{ij} = \frac{w_j N_{jk}(t_i)}{w(t_i)}. \tag{7.12}$$

Zunächst ist das Minimum in Gleichung (7.8) über die $n+1$ Kontrollpunkte und $n+1$ Gewichte zu bilden. Eines der Gewichte können wir frei wählen, da sich eine rationale Kurve nicht ändert, wenn man die Gewichte mit einem gemeinsamen Faktor multipliziert.

Wir können allerdings die Kontrollpunkte aus der Minimierung durch folgendes Ergebnis entfernen: In (Schneider, 1992, Satz 4.1) wird gezeigt, daß sich die optimalen Kontrollpunkte zu gegebenen Gewichten $\mathbf{w}$ und Approximationspunkten $\mathbf{Q}^{(l)}$ aus

$$\mathbf{D}^{(l)} = \Phi^{+}(\mathbf{w})\mathbf{Q}^{(l)}, \qquad 1 \leq l \leq d \tag{7.13}$$

ergeben. Die $(n+1) \times (m+1)$ Matrix Φ^{+} ist die Pseudoinverse von Φ, wie sie in Abschnitt 5 in Kapitel 2 definiert wurde.

Somit läßt sich die Minimierung von Gleichung (7.8) auf die Minimierung von

$$\sum_{l=1}^{d} \|(\mathbf{I} - \mathcal{P}_{\Phi}(\mathbf{w}))\mathbf{Q}^{(l)}\|^2 \tag{7.14}$$

zurückführen. $\mathcal{P}_\Phi(\mathbf{w}) = \Phi(\mathbf{w})\Phi^+(\mathbf{w})$ ist der orthogonale Projektor in den Spaltenraum von Φ, eine $(m+1) \times (m+1)$ Matrix.

Da die Berechnung von $\mathcal{P}_\Phi(\mathbf{w})$ sehr aufwendig ist, wird Gleichung (7.14) in $\mathbf{w} = \mathbf{w}^0$ linearisiert. Statt $\mathcal{P}_\Phi(\mathbf{w})$ verwenden wir in (7.14) $\mathcal{P}^L_\Phi(\mathbf{w})$ mit

$$\mathcal{P}^L_\Phi(\mathbf{w}) = \mathcal{P}_\Phi(\mathbf{w}^0) + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{P}_\Phi}{\partial w_s}(\mathbf{w}^0)(w_s - w_s^0). \tag{7.15}$$

Damit haben wir auch das nichtlineare Problem (7.14) durch ein lineares Problem angenähert. Die Lösung dieses Problems liefert in vielen Fällen eine gute Approximationskurve $\mathbf{p}$. In manchen Fällen werden einige der Gewichte allerdings negativ. Alles, was wir dann tun können, ist die Gewichte durch eine Substitution von 0 weg zu beschränken. Das ist wieder in (Schneider, 1992, Abschnitt 4.2.2) beschrieben.

Die Substitution $w_j = h(z_j)$, die wir verwenden, muß einerseits die w_j den z_j bijektiv zuordnen und andererseits die Beziehung $h(\mathbb{R}) \subset (\epsilon, \infty)$ erfüllen. Die Funktion

$$w_j = h(z_j) = (\epsilon + \frac{\pi}{2} + \arctan z_j) \quad \epsilon > 0 \tag{7.16}$$

erfüllt diese Forderungen.

Um also stets positive Gewichte garantieren zu können, müssen wir die nichtlineare Funktion

$$\sum_{l=1}^{d} \|(\mathbf{I} - \mathcal{P}^L_\Phi(\mathbf{z}))\mathbf{Q}^{(l)}\|^2 \tag{7.17}$$

nach den Variablen $z_1, \dots, z_n$ minimieren.

Bevor wir diese Funktion minimieren können, müssen wir noch die partiellen Ableitungen des Projektors $\mathcal{P}_\Phi$ nach den Gewichten bestimmen. Nach (Schneider, 1992, Satz 4.2) ergeben sich diese aus

$$\frac{\partial \mathcal{P}_\Phi}{\partial w_s} = (\mathcal{P}^\perp_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial w_s} \Phi^+) + (\mathcal{P}^\perp_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial w_s} \Phi^+)^T. \tag{7.18}$$

In dieser Gleichung bezeichnet $\mathcal{P}^\perp_\Phi = \mathbf{I} - \mathcal{P}_\Phi$ den zu $\mathcal{P}_\Phi$ orthogonalen Projektor.

3. Approximation mit Tensorproduktflächen

Um eine Menge von $m+1$ Punkten $\mathbf{q}^{(i)}$ mit gegebenen Parametern (u_i, v_i) mit einer polynomialen oder rationalen Tensorproduktfläche zu approximieren, können wir dieselben Verfahren wie für die Approximation mit Kurven verwenden. Wir müssen nur die Kontrollpunkte (und Gewichte) umnumerieren. Um also die $\mathbf{q}^{(i)}$ mit einer Tensorproduktfläche der Ordnung (l, k) mit $r \cdot s$ Kontrollpunkten $\mathbf{d}^{(ij)}$ über den

Trägervektoren $\mathbf{U}$ und $\mathbf{V}$ zu approximieren, benutzen wir die Indextransformation

$$\tau : (i,j) \rightarrow \tau(i,j) = i + jr, \qquad \tau(\{0,\ldots,r-1\} \times \{0,\ldots,s-1\}) = \{0,\ldots,rs-1\}. \tag{7.19}$$

Damit führen wir die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \hat{N}^{(\tau(i,j))}(u,v) &= N_{il}(u) \cdot N_{jk}(v) \\ \hat{\mathbf{d}}^{(\tau(i,j))} &= \mathbf{d}^{(ij)} \\ \hat{w}^{(\tau(i,j))} &= w^{(ij)} \end{aligned} \tag{7.20}$$

ein.

Um nun die $\mathbf{q}^{(i)}$ mit einer polynomialen Fläche zu approximieren, müssen wir die neue Zielfunktion

$$F(\hat{\mathbf{D}}) = \sum_{l=1}^{3} \|\mathbf{Q}^{(l)} - \hat{\Phi}\hat{\mathbf{D}}^{(l)}\|^2 \tag{7.21}$$

minimieren. Dabei sind $\hat{\mathbf{D}}$ und die Matrix $\hat{\Phi} = ((\hat{\Phi}_{ij}))$ folgendermaßen aufgebaut:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_{ij} &= \hat{N}^{(j)}(u_i, v_i) \qquad \text{für } 0 \leq i < m\,,\ 0 \leq j < rs-1, \\ \hat{\mathbf{D}}^{(l)} &= (\hat{\mathbf{d}}_l^{(0)}, \ldots, \hat{\mathbf{d}}_l^{(rs-1)}) \qquad \text{für } 1 \leq l \leq 3. \end{aligned} \tag{7.22}$$

Für die Approximation mit einer rationalen Tensorproduktfläche hat die Zielfunktion dieselbe Gestalt wie die in Gleichung (7.21), nur daß die Matrix $\hat{\Phi} = ((\hat{\Phi}_{ij}))$ nun die Einträge

$$\hat{\Phi}_{ij} = \frac{\hat{w}^{(j)}\hat{N}^{(j)}(u_i,v_i)}{\sum_{q=0}^{rs-1} \hat{w}^{(q)}\hat{N}^{(q)}(u_i,v_i)} \qquad \text{für } 0 \leq i < m\,,\ 0 \leq j < rs-1 \tag{7.23}$$

enthält.

4. Testergebnisse

Leider war es zeitlich nicht mehr möglich, ein Verfahren für die Approximation mit Tensorproduktflächen zu implementieren. Wir haben allerdings die Approximation mit polynomialen und mit rationalen Kurven implementiert.

In den Tabellen 7.1 bis 7.3 findet man die Ergebnisse einiger Testläufe der Approximationsverfahren. Die Bezeichnung der Spalten ist analog zu der in Abschnitt 6 in Kapitel 5.

Die Meßpunkte wurden durch Simulation des Meßfühlers gewonnen. Um eine gute Näherung für die Parameter der Meßpunkte zu erhalten, wurde eine Lagebestimmung durch Minimierung durchgeführt und die Parameter der so gefundenen Idealpunkte als Parameter für die zu approximierenden Meßpunkte verwendet.

Eingabe			Polynomial			Rational		
n	r	χ_0^2	k	χ^2	Zeit	k	χ^2	Zeit
16	5	7,663	2	2,747	0,2	8	0,617	2,5
32	5	9,158	2	4,209	0,4	21	3,984	25,4
32	7	18,032	2	8,276	0,3	12	7,195	11,7

Tabelle 7.1. Approximation der Kontur aus Abbildung 5.3.

Eingabe			Polynomial			Rational		
n	r	χ_0^2	k	χ^2	Zeit	k	χ^2	Zeit
32	5	8,45	2	4,641	0,2	2	7,484	1,1
128	5	8,192	2	5,543	0,8	6	6,899	121,4

Tabelle 7.2. Approximation der Kontur aus Abbildung 5.4.

Eingabe			Polynomial			Rational		
n	r	χ_0^2	k	χ^2	Zeit	k	χ^2	Zeit
64	1	0,321	2	0,104	2,4	4	0,095	73,2
64	3	2,87	2	0,907	2,5	2	0,797	35,2

Tabelle 7.3. Approximation der Kontur aus Abbildung 5.5.

Den drei Tabellen kann man entnehmen, daß der Fehler durch eine Approximation nach der Lagebestimmung stark verbessert wird. Die rationale Approximation führt — wie zu erwarten ist — zu besseren Ergebnissen als die polynomiale. Dabei scheint uns der Aufwand für die rationale Approximation gegenüber der polynomialen Approximation aber unverhältnismäßig groß.

In unserer Anwendung, in der es ja auch darauf ankommt, daß die Zeit für Berechnungen gegenüber der Schleifzeit gering bleibt, wird man der polynomialen Approximation den Vorzug geben.

ANHANG A

Die Berechnung von Momenten

In diesem Anhang geben wir die Herleitung der Formeln an, mit denen wir in den Kapiteln 5 und 6 die Momente von ebenen Polygonen und von Dreiecken im Raum berechnet haben.

Die Momente sind, wie wir schon gesehen haben, als Integrale gewisser Funktionen über die Punkte eines Körpers definiert. Für eine parametrische Kurve oder Fläche $\mathbf{f}$ wird dieser Körper von allen Punkten $\mathbf{f}(t)$ gebildet. Wenn $\mathbf{f}$ als Summe

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{f}^{(i)}(t) \tag{A.1}$$

dargestellt werden kann, wobei für jedes t höchstens eines der $\mathbf{f}^{(i)}(t)$ von $\mathbf{0}$ verschieden ist, können wir zunächst die Momente der $\mathbf{f}^{(i)}$ berechnen und daraus dann die Momente von $\mathbf{f}$ zusammensetzen.

Die Masse von $\mathbf{f}$ ist die Summe über die Massen der $\mathbf{f}^{(i)}$:

$$M = \int_{(\mathbf{f})} 1 \,\mathrm{dm}(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{n} \int_{(\mathbf{f}^{(i)})} 1 \,\mathrm{dm}(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{n} M^{(i)} \tag{A.2}$$

Der Schwerpunkt $\mathbf{s}$ von $\mathbf{f}$ ist das gewichtete Mittel der Schwerpunkte $\mathbf{s}^{(i)}$ der $\mathbf{f}^{(i)}$:

$$\mathbf{s} = \frac{1}{M} \int_{(\mathbf{f})} \mathbf{x} \,\mathrm{dm}(\mathbf{x}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{n} \int_{(\mathbf{f}^{(i)})} \mathbf{x} \,\mathrm{dm}(\mathbf{x}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{n} M^{(i)} \mathbf{s}^{(i)} \tag{A.3}$$

Die Trägheitsmomente von $\mathbf{f}$ lassen sich — genau wie die Masse — wieder als Summe der Trägheitsmomente der $\mathbf{f}^{(i)}$ berechnen.

In den folgenden Abschnitten geben wir an, wie wir Polygone und Dreiecke parametrisiert haben, um die Formeln für die Momente aus den Kapiteln 5 und 6 zu berechnen. Mit diesen Angaben ist es durch einfache Integration möglich, diese Formeln zu erhalten.

1. Ebene Polygonzüge

Seien $\mathbf{p}^{(0)}, \mathbf{p}^{(1)}, \ldots, \mathbf{p}^{(n+1)}$ die Ecken eines Polygons in der Ebene. Wir stellen den Polygonzug, der die Punkte verbindet, durch eine stückweise lineare Funktion über dem Intervall $[0, i+1)$ dar. Das i–te Stück ist dann

$$\mathbf{f}^{(i)}(t) = \begin{cases} (1-t+i)\mathbf{p}^{(i)} + (t-i)\mathbf{p}^{(i+1)} & \text{für } i \le t < i+1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{A.4}$$

Der gesamte Rand ist damit $\mathbf{f} = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{f}^{(i)}$.

Um die Momente von $\mathbf{f}^{(i)}$ berechnen zu können, müssen wir noch $\mathrm{dm}(\mathbf{f}^{(i)})$ durch dt ausdrücken. Zunächst ist

$$\mathrm{dm}(\mathbf{f}^{(i)}) = \varrho\, \mathrm{ds} = \varrho \|\dot{\mathbf{f}}^{(i)}\|\, \mathrm{dt} \tag{A.5}$$

und, wenn wir noch beachten, daß wir $\mathbf{f}^{(i)}$ mit Einheitsmasse belegen,

$$\mathrm{dm}(\mathbf{f}^{(i)}) = \|\mathbf{p}^{(i)} - \mathbf{p}^{(i+1)}\|\, \mathrm{dt}\,. \tag{A.6}$$

2. Die Fläche eines ebenen Polygons

Die Fläche eines ebenen, geschlossenen Polygons mit den Ecken $\mathbf{p}^{(0)}, \mathbf{p}^{(1)}, \ldots, \mathbf{p}^{(n+1)} = \mathbf{p}^{(0)}$ parametrisieren wir, indem wir es in Dreiecke mit den Ecken $\mathbf{p}^{(i)}, \mathbf{p}^{(i+1)}, \mathbf{0}$ zerlegen. Dabei ist das i–te Teildreieck als

(A.7)

$$\mathbf{f}^{(i)}(u,v) = \begin{cases} u((1-v+i)\mathbf{p}^{(i)} + (v-i)\mathbf{p}^{(i+1)}) & \text{für } 0 \le u \le 1,\ i \le v < i+1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

gegeben. Auch hier benötigen wir das Massenelement $\mathrm{dm}(\mathbf{f}^{(i)})$ in Abhängigkeit von du und dv:

$$\mathrm{dm}(\mathbf{f}^{(i)}) = \varrho\, \mathrm{dA} = \varrho\, \Delta\, \mathrm{du}\, \mathrm{dv}, \tag{A.8}$$

wobei Δ die Funktionaldeterminante von $\mathbf{f}^{(i)}$ nach u und v ist,

$$\begin{aligned} \Delta &= \det((1-v+i)\mathbf{p}^{(i)} + (v-i)\mathbf{p}^{(i+1)}, u(\mathbf{p}^{(i+1)} - \mathbf{p}^{(i)})) \\ &= u \det(\mathbf{p}^{(i)}, \mathbf{p}^{(i+1)}). \end{aligned} \tag{A.9}$$

3. Momente eines Dreiecks im Raum

Wir parametrisieren ein Dreieck mit Ecken $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^3$ durch

$$\mathbf{f}(u,v) = \begin{cases} \mathbf{a}_1 + u(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1) + v(\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1) & \text{für } 0 \le u, v \le 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{A.10}$$

Zur Abkürzung schreiben wir $\mathbf{d}_3 = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$ und $\mathbf{d}_2 = \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1$.

Das Massenelement eines Dreiecks erhalten wir mit der ersten Fundamentalform

$$E = \mathbf{d}_3^2, \qquad F = \mathbf{d}_3\mathbf{d}_2, \qquad G = \mathbf{d}_2^2. \tag{A.11}$$

als

$$\mathrm{dm}(\mathbf{f}) = \varrho\, \mathrm{dA}(\mathbf{f}) = \varrho\sqrt{EG - F^2}\, \mathrm{du}\, \mathrm{dv} = \Delta\, \mathrm{du}\, \mathrm{dv} \tag{A.12}$$

wobei Δ die Fläche des Dreiecks ist.

Literaturverzeichnis

[Boehm/Prautzsch, 1993] Boehm, W. und Prautzsch, H. (1993). *Numerical Methods*. A K Peters, Wellesley, MA.

[Bronstein/Semendjajew, 1980] Bronstein, I. und Semendjajew, K. (1980). *Taschenbuch der Mathematik*. Harri Deutsch, Thun und Frankfurt/Main, neunzehnte Auflage.

[Farin, 1994] Farin, G. (1994). *Kurven und Flächen im CAGD*. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, zweite Auflage.

[Hemdt, 1989] Hemdt, A. P. v. (1989). *Standardauswertung in der Koordinatenmeßtechnik*. Dissertation, RWTH Aachen.

[Hoschek/Lasser, 1992] Hoschek, J. und Lasser, D. (1992). *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*. B.G.Teubner, Stuttgart, zweite Auflage.

[Krumholz, 1986] Krumholz, H.-J. (1986). *Optimierte Istgeometrie–Berechnung in der Koordinaten–Meßtechnik*. Dissertation, RWTH Aachen.

[Kuhn, 1990] Kuhn, T. (1990). *Ist– und Sollwerte von Freiformflächen*. Diplomarbeit, TU Braunschweig.

[Lehmann, 1974] Lehmann, T. (1974). *Elemente der Mechanik I: Einführung*, Band 14 in *Studienbücher Naturwissenschaft und Technik*. Bertelsmann Universitätsverlag, Düsseldorf, erste Auflage.

[Lehmann, 1977] Lehmann, T. (1977). *Elemente der Mechanik III: Kinetik*, Band 16 in *Studienbücher Naturwissenschaft und Technik*. Bertelsmann Universitätsverlag, Düsseldorf, erste Auflage.

[Piegl, 1991] Piegl, L. (1991). On NURBS: A Survey. *IEEE CG&A*, 11(1):55–77.

[Press et al., 1988] Press, W. H. et al. (1988). *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, Cambridge, England, first edition.

[Rogers/Fog, 1989] Rogers, D. and Fog, N. (1989). Constrained B–Spline Curve and Surface Fitting. *Computer–Aided Design*, 21:641–648.

[Schneider, 1992] Schneider, F.-J. (1992). *Interpolation, Approximation und Konvertierung mit rationalen B–Splines*. Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt.

[Stoer/Bulirsch, 1978] Stoer, J. und Bulirsch, R. (1978). *Einführung in die Numerische Mathematik I und II*. Springer–Verlag, Berlin Heidelberg New York, zweite Auflage.

[Wilkinson, 1969] Wilkinson, J. (1969). *Rundungsfehler*. Springer–Verlag, Berlin Heidelberg New York.